Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

5.9.-69.

ƧI

ELEMENTA
EUCLIDEA
GEOMETRIÆ,
PLANÆ AC SOLIDÆ;
ET SELECTA
EX ARCHIMEDE
THEOREMATA,
QUIBUS ACCEDIT
TRIGONOMETRIA,
AUCTORE
ANDREA TACQUET

Soc. Jeſ. Sacerdote, & Matheſeos Profeſſore.

Noviſſimam hanc Editionem adornavit, plurimiſque *Corollariis* varios Propoſitionum uſus exhibentibus illuſtravit, & Schemata XL. addidit

GULIELMUS WHISTON. A. M.

Matheſeos Profeſſor Lucasianus.



C. os.

VENETIIS,

EX TYPOGRAPHIA HERTZIANA.

MDCCXXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

P. V. MUSSCHENBROEK

SUIS

AUDITORIBUS

S. D.

INter eos, qui Elementa Euclidis Mathematica ſuis demonſtrationibus illuſtrarunt, haud mediocrem meruit deportavitque laudem Cel: ANDR. TACQUETUS; ſuffragia approbantia adeo unanimia fuerunt, ut aliquoties in diverſis Europæ locis ejus com-mentarii typis mandati ſint; nec miror eos quam plurimum placuiſſe, eminet enim in omnibus demonſtrationibus, tam directis, quam quæ ad abſurdum ducunt, magna perſpicuitas & amabilis brevitas, ut fere nihil me-

lius exſpectari poſſe videatur : utramque probandi methodum , directam & indirectam , Auctor ſapienter retinuit , ut tyrones aſſueſcerent methodis veterum Geometrarum omnibus ; tum ut hæc Elementa inſervirent loco Logicæ ad docendum varios ratiocinii & demonſtrationis modos . Quæcumque in Euclideis minus utilia , aut nimis prolixa ſunt , omiſit ; ubi utiliora addi poſſe judicavit , Corollaria & Scholia egregia adjunxit : hinc ſi palmam omnibus non eripuiſſe , ſaltem cum optimis de ea certaſſe cenſeri poteſt . Quamobrem digna hæc Elementa cenſuit Clar. Britanniæ Mathematicus GUIL. VVHISTONUS , quæ ornaret ſuis lucubrationibus & eruditis commentariis ; hi , ut & ipſum opus, quamplurimum placuerunt Orbi Mathematico , ut intra anguſtum temporis ſpatium typis excuſi ſint tribus vicibus in Britannia , hoc tempore diſciplinas Mathematicas fer-

ferventiſſime colente, & merito de ſummis in hiſce Viris gloriante. Deerant in noſtra regione exemplaria, ſæpiuſque dolui VOS hoc præſtanti opere deſtitui; idcirco conſului P. Coupio, Bibliopolæ diligenti, ut juxta ultimo editum Brittannicum exemplar hoc opus Tacquetianum typis iterum mandaret; nec defuit, curans ut nitidiſſime prodiret, correctum ſatis accurate a ſphalmatibus, & ornatum figuris æri inciſis melioribus, quam in omnibus antecedentibus impreſſionibus. Veſtros in uſus A. A. elegi hunc Auctorem potiſſimum; qui, præterquam quod Doctiſſimi VVHISTONI opera fulget, non tantum hæret in ſex prioribus Libris Euclidis, quemadmodum Commentatores plurimi; ſed ea, quæ fundamenta Planorum & Solidorum ſpectant, addidit; quæque ab aliis non niſi longis exhibita demonſtrationibus, ſolita ſua brevitate ac facilitate explicuit, ut abſque tædio

 legi,

legi, abſque difficultate res ſubtiles intelligi poſſint. Poſteriora æque Vobis ſcitu neceſſaria quam priora: omnia enim cum didiceritis, apti demum eſtis ad Philoſophiam Mathematicam cum fructu intelligendam; qua alioquin ignaro Matheſeos nihil obſcurius, perito nihil clarius dici poteſt, Nolui huic Libro aliquid adjicere ex meo penu deſumptum, ne in opus Clavianum excreſcat, tum quia me viva voce explicantem variis hæc Elementa modis, & plurima inſerentem audire ſoletis. Addita fuit huic editioni TRIGONOMETRIA PLANA noſtri Auctoris, brevis quidem, ſed clara, ſufficiens ad omnia intelligenda, quæ in Geometria Practica occurrunt: adjecta hæc quoque fuit impreſſioni Patavinæ, ſimul cum TRIGONOMETRIA SPHÆRICA ex P. Schotti Encyclopædia deprompta; retinui utramque; PLANAM, quia utilitate ſua & ju-

jucundiſſimis problematibus deleret ex animis veſtris, quicquid tædii anteacto labore cepiſſetis. SPHÆRICAM deſiderabam, ut me Aſtronomica tractantem methodo Mathematica, facile & cum voluptate intelligeretis. Haſce igitur Matheſeos partes commendare Vobis volui, quas dum explicuero, vera me ſtraviſſe fundamenta ad reliquas, ut & ad Philoſophiam hodiernam arbitror; his fruamini, & valete.

Trajecti ad Rhenum
1 Novembris 1724.

Digitized by Google

PRÆFATIO.

CUM apud nos decretum eſſet Elementa Geometriæ Euclidea juxta V. Cl. Andreæ Tacquet editionem recudere, dedi operam ut quam emendatiſſime, nec ſine auctariis e novo noſtro Typographeo prodirent. Atque equidem Editio hæcce Tacquetiana, quam haud immerito elegantiſſimam *vocat noſtræ profeſſionis Pater Cl. Barrovius, præ aliis mihi ſemper viſa eſt, & explicandi facilitate, & demonſtrandi perſpicuitate reliquis palmam præripuiſſe. Neque aliam fuiſſe Doctiorum de eadem ſententiam, publicus Geometrarum uſus ſuadere videtur. Vix aliam enim Elementorum Euclidorum formam ſæpius impreſſam, aut manibus frequentius tritam videre licet. Quin & illa quoque ad accurandam hanc præ reliquis editionem, quam integram hic damus, animos addiderunt, quod & præcipua Archimedis, Geometræ plane ſummi, de Sphæra, Cono, atque Cylindro Theore-*

mata,

mata, auro contra non cara ad calcem exhiberet; & in reliquis Editoris noſtri operibus Mathematicis, eruditiſſimis ſane, & ad uſum Tyronum ſcientias haſce proprio Marte aggredientium optime accommodatis, paſſim citata extaret. Defuerunt quidem, aut mihi ſaltem defuiſſe viſa ſunt etiam in optimis hiſce elementis nonnulla, quæ ſi haberentur, diſcentibus eſſent haud parum emolumenti allatura. Nempe in ſecundo libro methodum demonſtrandi incipientibus paulo difficiliorem: In quinto proportionum doctrinam in ſe facillimam per ambages nimias expoſitam; Atque etiam ob corollariorum practicorum defectum, Elementa nimis abſtracta, gracilia, & tædii plena cauſabar. Quocirca omnia ad incudem revocare, & quæ deſiderari poſſe videbantur ſupplere, in animum induxi. Secundi itaque libri demonſtrationes pleraſque tum rectangulorum conſtructione, tum exemplis numericis illuſtravi; Doctrinam de proportione, quam quintus liber complectitur, ſummatim & breviſſime expoſui: Et quod in noſtro opere, & in univerſo hoc ſtudiorum genere palmarium reor, varios propoſitionum Uſus *ſive theoreticos, ſive practicos, (faciliores nimirum, & quales diſcentium captui eſſent accommodi) condimenti inſtar, atque incitamenti haud raro appoſui. Quæ cum ita ſint, fas ſit ſperare Elementa Geometrica jam tandem, etiam ordine*

dine

dine Euclideo non mutato, & facilitate, & uſu ita fore comparata, ut Elementi aliis novo ordine atque methodo demonſtrandis non ſit opus futurum. Minime enim placet eorum ratio; qui prima Geometriæ elementa alibi quam apud Euclidem, quem ſolum tamquam unicum Elementorum Conditorem citant ubique Mathematicorum libri, & his mille annorum uſus ſatis commendat, quæſitum eunt. Hiſce quidem perlectis, atque in ſuccum & ſanguinem verſis, pergant ulterius Tyrones quoquo patet Matheſeos Campus, quaqua ducit Neotericorum ſolertia, in pleriſque ſane longe feliciſſima: ſed Duce, atque Auſpice Euclide pergant. Juvat antiquos exquirere fontes: *& ingens erit moræ, operæque pretium calculo analytico, indiviſibilium methodo, Infinitorum Arithmeticæ, & noviſſimæ fluxionum doctrinæ Conſtructionem Veterum Geometrarum Syntheticam, tamquam Scientiarum Mathematicarum baſim inconcuſſam, præſtaviſſe & prælibaſſe.*

Sciat autem Lector, me Corollaria iſta, quibus uſus propoſitionum continentur, e celeberrimis Elementorum ſcriptoribus, De Chales, Barrovio, Pardies, Sturmio, ex ipſo etiam Tacqueto alibi, atque e Geometrarum Principe Iſaaco Newton, quem honoris etiam cauſa nomino, potiſſimum mutuo accepiſſe; perpauca enim quæ de penu proprio profero, digna non

ſunt

ſunt quæ ſeorſim memorentur. Quæ vero de Elementis a Cl. Dno. de Chales editis depromſi, cum haud pauca ſint, ſine lineolis ſeparatricibus cernuntur; reliqua vero hujuſmodi uncinulis [] includuntur; ita tamen univerſa, ut quæ Tacqueto noſtro aliunde accedunt, characteris diverſitate ubique dignoſci poſſint.

Cuiquam autem auctor eſſe nollem, ut librum integrum ſimul & ſemel ſibi perlegendum imponat: In ſecundo enim libro, probationibus & illuſtrationibus noſtris contentus eſſe poteſt, prima ſaltem vice: & in libro quinto, e Monito noſtro ad Tyrones, *generalium de proportionalibus ratiocinandi modorum probe memor, ad Librum ſextum illico accedat; quem ſane ſi tum nequeat intelligere, cauſam non dicam quin propoſitiones libri 5. particulares prius omiſſas repetat. Quæ etiam circa Paradoxorum de contactus Angulo ſolutionem poſt prop. 16. lib. 3. afferuntur, cum ad Elementa non pertineant, neque ita ſolida videantur, tuto omitti poterunt. Reliqua autem omnia (niſi forte nonnullas axiomatum ſua luce clariſſimorum demonſtrationes minus neceſſarias exceperis) digna ſunt omnino quæ non tantum legantur, ſed & firmiter memoriæ atque animis infixa hæreant; tamquam Scientiæ inter humanas longe præſtantiſſimæ & certiſſimæ principia vere Aurea, & numquam*

ſatis

ſatis laudanda; quibus quidem ducibus non tantum Geometria, ſed & Phyſica etiam, & Aſtronomia extra Syderum Soliſque vias in immenſum creverunt, & etiamnum creſcunt; dum ſcientiæ hujus Parentes Exæquat Victoria Cælo.

Scribebam Cantabrigiæ III. Calendarum Martii A. D. 170^{2}_{3}.

Digitized by Google

De Editione tertia CANTABRIGIENSI Monitum.

EDITIONEM hanc Euclidis Elementorum juxta Cl. Tacquetum, quo Tyronum uſibus accommodatior atque inſtructior prodiret, quantum fieri poſſet perſpicuam & explicatam dare ſerio adlaboratum eſt. Theoremata bene multa novis demonſtrationibus muniuntur: alia, quibus eæ penitus deerant, iiſdem ſuppeditantur. Corollariis ac ſcholiis ſparſim inſertis, fulciuntur demonſtrationes inde ſubſecutæ, ut iis ſua firmitas & evidentiæ vis fortius ac melius conſtet. Propoſitionum complurium, quas uſui quaſi vix futuras omiſerat Tacquetus, non paucæ revocatæ ſunt; atque eorum Auctori poſtliminio reſtitutæ. Additamenta quibus Vir Cl. Gulielmus VVhiſtonus Editionem primam adornaverat, perſæpe ulterius tranſponuntur, ne propoſitione aliqua viderentur niti, quæ ante demonſtrata non fuiſſet. Theorematum demonſtrationes, ubique nimium breves viſæ ſint,

aut

Digitized by Google

aut ad amuſſim non conſtructæ, ſupplementis inditis pleniores, Tyronibuſque (ut ſpero) faciliores redduntur. Nonnulla afferuntur, quæ maxima ex parte, ab inclytis Geometris, magni nominis Viris decerpta ſunt, ut inde inſtructior evadat hiſce ſtudiis proſequendis, quicumque ad veram Philoſophiam tendit iter.

Hortandus eſt Matheſeos ſtudioſus; ut Elementis Geometriæ Analyticam adjungat praxin. Hinc ei in diſciplina tam ſublimi felicius progredi, & cum illa familiarius verſari licebit; imo & in ejuſdem receſſus abditos intimaque penetralia ei tandem introire fas erit.

Dabam XIII. Kal. April.
Anno Dom. 1722.

Ο' ΘΕΟΣ

Digitized by Google

Ο' ΘΕΟΣ Γεωμετρεῖ.

TU autem, DOMINE, quantus es Geometra? Quum enim hæc ſcientia nullos terminos habeat; cum in ſempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, TU uno hæc omnia intuitu perſpecta habes, abſque catena conſequentiarum, abſque tædio demonſtrationum. Ad cetera pene nihil facere poteſt intellectus noſter; & tamquam brutorum phantaſia videtur non niſi incerta quædam ſomniare, unde in iis quot ſunt homines, tot exiſtunt fere ſententiæ: in his conſpiratur ab omnibus, in his humanum ingenium ſe poſſe aliquid, imo ingens aliquid & mirificum viſum eſt, ut nihil magis mirum; quod enim in ceteris pene ineptum, in hoc efficax,

cax, ſedulum, proſperum, &c. TE igitur vel ex hac re amare gaudeo; TE ſuſpicere, atque illum diem deſiderare ſuſpiriis fortibus, in quo purgata mente & claro oculo non hæc ſolum omnia abſque hac ſucceſſiva & laborioſa imaginandi cura, verum multo plura & majora, ex Tua Bonitate & immenſiſſima ſanctiſſimaque Benignitate conſpicere & ſcire concedetur, &c.

Cl. Barrovii verba Apollonio ſuo præfixa.

Digitized by Google

SIGNORUM *quorum frequens uſus eſt in additionibus* EXPLICATIO.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ denotat quantitates a & b æquales eſſe.

$+$ *Signum additionis*. Sic $a + b$ denotat ſummam quantitatum a & b.

$-$ *Signum ſubductionis*. Sic $a - b$ denotat exceſſum quantitatis a ſupra b.

o *Signum nihili*. Sic $a - b = 0$ denotat a *minus* b (ſive exceſſum ipſius a ſupra b) æquari nihilo; & proinde quantitates a, b eſſe inter ſe æquales.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ denotat productum ex quantitatibus a, b in ſe invicem multiplicatis.

Quandoque etiam quantitates productum efficientes, abſque ſigno interpoſito conjunguntur. Sic AqE denotat productum ex multiplicatione quantitatis Aq per quantitatem E. [Et ſic quoque apud ipſum Tacquetum (*ſchol. p.* 36. *l.* 11.) ABC denotat ſolidum ex rectarum A, B, C *multiplicatione* continua productum. Aliquando tamen, Tacquetus quantitates *addendas* abſque ſigno interpoſito conjungit. Sic in demonſtr. p. 24. l. 5. AI denotat ſummam quantitatum A & I]

Sit quantitas A dividenda per B: Quotiens ſic $\left(\frac{A}{B}\right)$ notatur.

Et ſimiliter, $\frac{7}{4}$ eſt quotiens numeri 7 per 4 diviſi, ſive $1\frac{3}{4}$. Et cujuslibet fractionis (ut $\frac{1}{3}$) numerator (1) pro dividendo, denominator (3) pro diviſore habendus eſt, & ipſa fractio ($\frac{1}{3}$) pro quoto.

$::$ *Signum rationum æqualium*. Sic $A : B :: \alpha : \beta$, (vel $A : B :: \alpha : \beta$) denotat eamdem eſſe rationem inter A & B, ac inter α & β.

$\div\!\div$ *Signum proportionis continuæ*. Sic A, B, C $\div\!\div$ denotat A eſſe ad B, ut B eſt ad C.

q *Signum quadrati*. Sic CBq denotat quadratum lateris CB.

** c *Signum*

c *Signum cubi*. Sic Ac eſt cubus lateris A.

$\sqrt{}$ *Signum radicis quadraticæ*. Sic $\sqrt{5}$ eſt radix quadratica numeri 5; & $\sqrt{\overline{A + B}}$ eſt radix quadratica ſummæ quantitatum A & B. Hoc eſt, ſi area quadrati ſit 5, vel $A + B$; ejuſdem latus quodlibet per $\sqrt{5}$, vel $\sqrt{\overline{A + B}}$ denotabitur.

$\sqrt{}c$ *Signum radicis cubicæ*. Sic $\sqrt{c5}$ eſt radix cubica numeri 5: Et $\sqrt{cAqE}$ eſt radix cubica quantitatis AqE; hoc eſt, ſi ſupponatur cubus ſolido AqE æqualis, erit $\sqrt{cAqE}$ linea recta, lateri ejuſdem cubi æqualis; quæ nempe in ſui ipſius quadratum ducta, ipſum cubum generat.

Digitized by Google

XIX

AMICE
LECTOR.

CUM multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuria laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratia hunc laborem qualemcumque ſuſcepi, novam editionem adornare; in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. *Inprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida; quorum ſumme neceſſaria cognitio eſt.*

2. *Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoque idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris a reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primum litteris prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.*

Digitized by Google

3. *Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum fere vel nullus uſus eſt, aut certe non alius, quam ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori via poteram demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque ſervo, quem bis mille annorum uſus probavit.*

4. *Demonſtrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodeſt. Ea ſiquidem tardiores & bebetiores non juvat, ſubtilibus autem & ingenioſis moleſta eſt.*

5. *Quamvis autem brevis eſſe ſtuduero, exiſtimavi tamen, me a propoſito non recedere, ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria & ſcbolia adjunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſi quid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde in quibus laboratum huc uſque fuit, vel explicare vel demonſtrare conatus ſum.*

6. *In libro primo parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter ac longo circuitu demonſtrabile.*

7. *Secundum librum, in quo laborare multum tyrones ſolent; diſpoſui ad eum fere modum, quo jam analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem*

ſi

ſi exacte tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res brevior; ſed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. *In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torſere omnes, ſolvuntur.*

9. *In quinto libro, proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primum proportionum elementa faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri ſextam definitionem, qua proportionum æqualitas per multiplices explicatur, oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum; cujus etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus a nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclideas quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis forte illas præ noſtris pobationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno ac demonſtro indicium univerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſem, ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremo de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo; ac in primis demonſtro axioma illud percelebre ſeu potius theorema, proportionem extremorum ex quot libet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometria fuit deſideratum.*

10. *Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, alia via plus quam decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide ejuſque commentatoribus contulerit, deprehendet.*

11. *In libris quarto, ſexto, undecimo præſtantur ea quæ univerſim ſupra indicavimus.*

12. *Denique ſelecta ex Archimede theoremata, alia ſimiliter ac breviori via demonſtrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac ſphæra doctrinam poſtremis tredecim propoſitionibus adjectis, ampliavi; quibus inter cetera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quam in ſuperficie continuari. Euclidi porro Archimedea illa ſubnexui; non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque uſu eximia ſunt; tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometræ inventa admiranda aſſequi ſeſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.*

Tu hæc habe; &, ſi placuerint, lege ac diſce; inventurus in his principia nobiliſſimæ, & forte omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendit tibi, quam ſubnecto,

Digitized by Google

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progreſſu Matheſeos.

MATHEMATUM elementa tradituro, viſum eſt de illorum origine ac præſtantia præfari quædam, ut intelligant Matheſeos candidati, cujuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt; & planum fiat adverſus eos qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda, Petri Rami diligentia, qui ſcholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accurate copioſeque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Joſepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. ſcribit Sethi nepotes Cælorum ordinem ac Siderum curſus obſervaſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberenter, cum Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique ſua inventa inſcripſerunt, ut ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes, hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Aiunt autem lapideam illam ab ipſis dedicatam, quæ & noſtris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluvium primos mortalium Aſſyrios & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem Joſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Aſſyria ad Ægyptios translatæ ſunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo jubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcendum egregia eſſe, ut apud eumdem Joſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque, quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicavit. Quibus deinde ſtudiis adeo Ægyptii floruere, ut Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto a ſacerdotibus publica vacatione fretis inventas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philoſophos pervenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is ſane, præter alia, primi libri propoſitiones 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. l. 4. cujus inventi lætitia elatus bovem immolaſſe dicitur. Idem Æquinoctia & Solſtitia obſervare cœpit, Laertio teſte; & Solis eclipſim, ut ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipſim Lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius ille Philoſophorum antiquiſſimus, Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam vero, ut refert

fert Laertius, a materia abſtraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed in primis ob inventas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitia tanta affectus eſt, ut teſte Apollodoro apud Laertium, Hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impenſe & docuit & exercuit. Neque ſolum acute & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honeſtas tamque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quamdam ſcriptam indicat Ariſtoteles; & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo Solem Poloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula,) eumdemque de habitationibus in Luna nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23. l. 1. Hos excepere Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longe clariſſimus Hippocrates fuit, ille e mercatore Philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut ſingularem & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit. Ejus tum Phyſica, tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt invi-

vidia (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyrenæus, licet ejus inventa Mathematica non extant, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et in primis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros, Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quicquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophia eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur; οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω: *nullus Geometriæ expers accedito*: illuſtri ſane argumento quam non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certe Plato Matheſeos fuerit & admiratoe & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares a Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; a quibus Mathemata egregie ſunt amplificata. Leodamas Analyſim a Platone acceptam exercuit, eju ſque ope inveniſſe multa a Laertio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Ar-

Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit latus, quod Mathematicam ad humanos uſus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti * Dædalus aliique artifices, fabulis poetarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imparator, qui nimirum in patriis bellis, copiis civium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quam inventis ſuis. Leon ſane Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit, & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudoxus Cnidius ſuperiorum æqualis, in Arithmeticis magnus, & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus; Elementa item conſcripſit; & generaliora effecit; & ſectiones a Platone inchoatas auxit; inſuper Aſtronomicarum hypotheſium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſupra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracleotes & Menæchmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, omnes Platonici Geometriam multo perfectiorem reddiderunt. Et Menæchmus quidem ſectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt univerſaliora & auctiora. Atqui hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, &

* *Error: multis enim ſeculis poſt Dædalum floruit Archytas.*

& Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cum auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, Abi, inquit, anſas enim Philoſophiæ non habes.

De Ariſtotele vero quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſchola duo præcipue celebrantur, Eudemus & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum: ille hiſtoriam Mathematicam condidit; ex quo Proclus aliique ſua mutuati ſunt. Ariſtæo, Iſidoro, Hypſicli, Geometris ſubtiliſſimis, ſolidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratius, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum fere poſt annis Eratoſthenes & Archimedes. Eratoſthenis clarum in primis nomen fuit: ſed ejus ſcripta periere [*quam plurima, ſed non omnia*] Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quemdam humanæ ſubtilitatis, totiuſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Aſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor [*imo ſeptem*] Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis

dis libri 14. & 15. ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo, hic 6. ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum [*Iſidorum, atque Hypſiclem*] excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir plane mirabilis, ſupraque (inquit * Plinius) naturam mortalium. Is vero non Aſtronomiæ tantum, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6. Hipparchi vero 12. ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem [*& Appollonium*] commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tamquam eccellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tam in Machanicis quam in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita, a Pappo l.3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera a Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmeti-

* *Error: Plinus enim Ptolemæo ætate prior erat.*

metica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides; vere totius numericæ ſubtilitatis magiſter; a quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus a Franciſco Vieta, & Renato Carteſio multo perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis; Serenus binis de cylindri [*& coni*] ſectione libris, Geometris notiſſimus; Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus, ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliiſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic, opinor, ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514. Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, optico ſpeculorum artificio combuſſit *. Theonis laudes vere magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros; quos Euclidi hactenus adſcripſere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus; neque ullo ſolido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres [*fere*] poſtremus, ut qui vixerit circa annum 400. ſed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fecunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum

* *Duos ejuſdem nominis male confundit Tacquetus. Proclus enim Lycius, quampluribus in Philoſophia ac Matheſi ſcriptis clarus, anno Chriſti 485. e vita deceſſit, ac proinde diverſus eſt ab illo Proclo, qui Anaſtaſio imperante Vitaliani claſſem incendit.*

rum libros ſeptem † a quibus duo primi perierunt *, Reliqui quinque § tam multis abundant, tamque variis, ex omni prope genere Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ hiſtoriam brevem. Ex qua Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sane Reip. litterariæ Principes iidem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas ſorores partu velut uno, quas qui diſtrahere ab invicem violente velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum inſigni injuria crudelis ſit; quando, quod fieri in gemellis ſolet, uno vel loco vel morte ſublato, languere, quin & contabeſcere alterum neceſſe ſit.

† *Octo ſaltem.* * *Aut in Bibliothecis deliteſcunt,* § *Sex.*

Ad Bibliopegum.

Tabulæ Æneæ 1. 2. 3. 4. 5. & 6. adjungantur poſt Paginam 330.

NOI RIFORMATORI

dello Studio di Padoa.

AVendo veduto per la fede di Reviſione, & Approbatione del P. F. *Tomaſo Maria Gennari Inquiſitore* nel Libro intitolato: *Elementa Euclidea Geometria plane, ac ſolida Auctore Andrea Tacquet Soc. Jeſu, Noviſſima editione ornata da Gulielmo VVbiſton* non v'eſſer cos'alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro; niente contro Principi, & buoni Coſtumi, concedemo Licenza a *gl'eredi di Gabriel Hertz Stampatori*, che poſſi eſſer ſtampato, oſſervando gl'ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite copie alle Publiche Librarie di Venetia, e di Padoa.

Dat. 22. Luglio 1736.

(Michiel Moroſini Cav. Rif.

(Gio: Emo Cav. Proc. Rif.

(*Agoſtino Gadaldini Seg.*

1736. 20. Luglio.
Regiſtrato nel Magiſtrato Eccell. contro la Beſtemia.

Angelo Legrenzi Seg.

Digitized by Google

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

SCIENTIÆ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis, rationali naturæ a conditore DEO impreſſis, elicere aliquid quod prius ignorabatur, atque inde rurſum aliud ex alio; ut prior cognitio ſemper ad ulteriorem ſit gradus. Quæ ratio ſi accurate teneatur, ex minimis & per ſe notis ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque ſcientiæ, præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit, ſciunt omnes, qui hiſce ſtudiis imbuti ſunt. Et ſane Geometria (ut de aliis Matheſeos partibus jam nihil dicam) mirum eſt, quam brevi ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primo ſimpliciſſima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non ſit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentia innoteſcunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria; *Definitiones*, *Poſtulata*, *Axiomata*.

V*Oluit autem Euclides in* primo *hoc elementorum ſuorum libro prima* Geometriæ *principia exponere. Quod ut ordine fieret*, Definitiones, *ſive vocum uſitatiſſimarum explicationem præmittit: hiſce vero* Poſtulata *ſuperaddit nonnulla, ab omnibus ſanæ mentis facile concedenda. Poſtea* Axiomatis *illis clariſſimis quibus, natura atque ratione ducibus, non poſſumus non aſſentiri omnes, propoſitis*, Demonſtrationes *ſive argumenta infallibilia ubique adhibet, ut veritatum Mathematicarum fidem vel a pervicaciſſimo Adverſario, maximeque invito extorqueat. Inprimis autem de* Lineis, *variiſque quos illæ concurrendo formant* Angulis *tractat: & propoſitionibus primis* 8. *de* Triangulis *planis agit: ſimulque* Angulorum *planorum naturam explicat. Poſt propoſitiones iſtas*, Angulos Lineaſ-

neaſque *biſecandi*, & Perpendicula *ſive excitandi ſive demittendi methodum oſtendit. Deinde vero alias* Triangulorum, *quin* & linearum *æquidiſtantium ſive* Parallelarum *affectiones aperit. Hiſce vero peractis, Quadrilaterorum, & ſpeciatim* Parallelogrammorum *proprietates conſiderat; oſtenditque qua ratione* Polygona, *ſive figuræ multangulæ & irregulares ad rectangula, aut parallelogramma, aut etiam triangula, figuras nimirum magis notas atque regulares, reduci queant. Poſtremo autem agmen claudit celeberrimum illud Theorema Pythagoricum, ejuſque converſum:* In omni Triangulo Rectangulo Quadratum Lateris quod recto angulo opponitur æquale eſſe duobus ſimul reliquorum laterum quadratis: Et, ſi quadratum unius lateris æquetur duobus ſimul reliquorum laterum quadratis, angulum illi lateri oppoſitum rectum eſſe.

DEFINITIONES.

1. PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.
Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantum longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. Tabula 1. 4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel ut Plato: Recta linea eſt, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirum in ipſa linea producta poſito.*]

Unus omnium ſenſus eſt.

Inſtrumentum quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ utrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea; tum regulam inverſam, ſic ut extremitas prius dextra jam ſit ſiniſtra, rurſum applica lineæ prius deſcriptæ: ſi plane cum illa congruat, recta eſt regula; ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantum longa & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Planum, ſive ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas jacet.

Vel

Vel ut Hero: Superficies plana eſt, cujus omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ. [*Nimirum ex fluxu directo lineæ rectæ: alias enim fieri poteſt ut linea recta deſcribat etiam ſuperficiem curvam.*]

Vel, Plana ſuperficies eſt, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirum in ipſa ſuperficie producta poſito.*]

Vel, Plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. Idem ſenſus eſt omnium.

Non definivit hic corpus, ſive ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret; Corpus eſt magnitudo longa, lata & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus eſt duarum linearum, in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A ſe mutuo tangentes in A, ſic ut non exiſtant ſibi mutuo in directum; hoc eſt, non efficiant unam lineam. *Fig.* 1, 4.

9. Latera ſeu crura anguli, ſunt lineæ quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuo occurrunt. *Fig.* 1, 4.

Cum angulus eſt unicus, una littera ad verticem poſita deſignatur: Cum plures ad unum punctum exiſtunt, deſignatur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unica lateribus prope verticem interpoſita. Sic in figura 5. angulus qui fit a lineis B A, C A deſignatur vel litteris tribus BAC, vel unica O. *Fig.* 5.

11. Anguli æquales, [vel potius ſimiles] dicuntur; ſi, cum ſibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. Ad hoc non requiritur, ut latera ſint æque longa. *Fig.* 2, 3.

12. Inæquales, [ſeu diſſimiles] dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. Sic angulus BAE major eſt angulo BAC. [*Hanc autem & præcedentem def. de angulis rectilineis intellige. Vide def.* 13.] *Fig.* 5.

Angulus non minuitur vel augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione conſiſtit, inclinatio autem linearum quantitas non eſt, neque angulus ullus quantitas erit. Et ſane eodem jure curvitas eſſet quantitas, quo angulus, cum ab invicem non

Digitized by Google

magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, alliſque Geometris angulos æquales eſſe dicemus, nihil aliud, quam inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi ſumus poſt propoſitionem 16. l. 3. [*Tacquetus hoc loco minus accurate de angulo diſſerere videtur. Angulus quidem non eſt* quantitas, *ſed tamen* quantus *eſt, hoc eſt,* augeri *poteſt, vel* minui. *Duæ enim lineæ rectæ in puncto concurrentes,* plures *vel* pauciores *gradus divaricationis a ſe invicem habere poſſunt, adeoque & angulum* majorem *vel* minorem *conſtituere. Unde in definitionib.* 15. *&* 16. *angulus ille* obtuſus *appellatur, qui recto* major *eſt; atque* acutus *qui recto* minor. *Angulus igitur quantitatis capax eſt, & alteri cuivis angulo proprie æqualis aut inæqualis eſſe dicetur. Eodem jure etiam curvitas eſt quantitatis capax, cum una quævis linea (vel ſuperficies) a linea recta (vel ſuperficie plana) magis aut minus recedere, hoc eſt, magis aut minus curva poſſit eſſe quam altera.*]

Fig 2. 4. 13. Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. [*Sed vide quæ ad coroll. poſt prop.* 16. *lib.* 3. *adjecimus.*]

Fig. 6. 14. Cum recta (CA) ſuper rectam (BF) conſiſtens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (CAB & CAF,) rectus eſt uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum.

Angulus rectus ſic etiam definiri poteſt.

Fig. 6. Rectus angulus is eſt (BAC,) cui a parte altera æqualis oritur (CAF,) ſi unum latus (BA) produxeris.

Duæ regulæ ſic compactæ ut angulum rectum contineant, inſtrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c. 2. l. 9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis eſt in rebus omnibus conſtruendis, dimetiendis, formandis & firmandis, ut nihil fere effici ſine illo poſſit. Normæ Examen ſic inſtituitur: In quavis recta BF, ſumpto puncto A, Normæ latus A E applica rectæ lineæ A F, & juxta latus alterum deſcribatur recta CA; converſa deinde Norma verſus B, ſi utroque latere congruat rectis C A, A B, ſcito eſſe legitimam & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtuſus angulus eſt (B A C,) qui recto (F A C) major eſt.

Fig. 8. 16. Acutus angulus eſt (L A I) qui recto (F A I) minor eſt.

17. Fi-

Digitized by Google

17. Figura plana, eſt ſuperficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.

18. Circulus eſt plana ſuperficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, a qua, ad aliquod punctum intra contentum (A,) omnes quæ duci poſſunt rectæ lineæ, ſunt æquales. Fig. 9.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur. Fig. 9.

20. Diameter circuli eſt recta per centrum ducta (B C,) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum biſariam dividens; [*ut ex omnimoda ſemicirculorum ſibi invicem ſuperimpoſitorum congruentia abunde liquet*.]

21. Semidiameter, ſive radius, eſt recta (A F,) ex centro ad circumferentiam ducta. Fig. 9.

22. Semicirculus eſt figura (B L C) comprehenſa a diametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.) Fig. 9.

Circulus ita generatur: Si recta linea (A B) uno extremo ſuo(A)manente fixo, in orbem circumagatur; recta ipſa circulum,extremitas illius altera(B)circumferentiam producet. Fig. 9.

Porro mira circuli indoles vel in ipſo exortu ſuo apparet. Ad ejus namque geneſim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quieſcit. Dein lineæ generantis puncta omnia,cum inæquales eodem tempore periodos abſolvant, diverſa celeritate moventur. Tertio peripheria circulum ambiens, conſtat quodammodo ex contrariis & extremis ſine medio; ex concavo nimirum & convexo,inter quæ rectum ita medium eſt,ut æquale inter majus & minus; idque eo mirabilius eſt, quod ea contraria inſint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa deprompſimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in diſſertatione Phyſico-Mathematica, quam una cum Cylindricis & Annularibus in lucem emiſimus anno 1652. Iſthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360.æquales partes(quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: ſemicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, eſt ſuperficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, ſive trilaterum, eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac ſimpliciſſima eſt, in quam ceteræ omnes reſolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum eſt, quod tria latera habet æqualia. Fig. 10.

26. Triangulum Iſoſceles, ſeu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia. Fig. 11, 12.

Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig. 13. 28. Rectangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet rectum.

Fig. 12. 29. Obtuſangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet obtuſum.

Fig. 10, 11. 30. Acutangulum triangulum eſt, quod tres habet acutos angulos.

Fig. 14. 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum eſt, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales; ſive latera æqualia ſint, ſive non.

Fig. 15. 32. Quadratum eſt, quod æquilaterum & rectangulum eſt, ac proinde æquiangulum.

Omne quadratum eſt rectangulum, ſed non contra.

Fig. 16. 33. Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt.

Fig. 17. 34. Rhomboides, quæ adverſa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

Fig. 14, 15, 16, 17. 35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera (AB, FC, & BF, AC) ſunt parallela. Quid vero ſint parallelæ, dicetur ſeq. defin.

Omne rectangulum & quadratum eſt parallelogrammum, ut ſuo loco demonſtrabitur; ſed non contra.

Fig. 18. 36. Rectæ lineæ parallelæ ſeu æquidiſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtant.

Æqualia intervalla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad unam ex duabus parallelam AB perpendiculares QL, æquales fuerint, dicentur rectæ AB, CF parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta LQ ad rectam AB perpendicularis, per AB ſemper perpendiculariter moveatur: tunc enim ejus extremum L deſcribit parallelam CF.

Euclides definit parallelas eſſe rectas lineas, quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ ſimul in infinitum productæ, licet ad ſe mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non ſint parallelæ, numquam tamen concurrant, (cujuſmodi ſunt Hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eumdem axem deſcriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas, licet numquam concurrant, fore ſemper æquali intervallo diſſitas, hoc eſt æquidiſtantes: poſſet enim quiſpiam objicere, fieri fortaſſis poſſe, ut etiam ipſæ, licet ad ſe mutuo ſemper appropinquarent, tamen numquam concurrerent. Quare

Digitized by Google

Quare Euclidea definitio paralleliſmi naturam non ſatis explicat. [*At non neceſſe eſt ut definitio Mathematica naturam rei definitæ explicet: eſt enim definitio nominis, non rei. Cum igitur Euclides eas rectas lineas nominaverit* parallelas, *quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum producta, in neutram partem coincidunt; & cum ſemper poſtea in hoc ſenſu parallelas uſurpaverit; cum denique eas definiverit per proprietatem ejuſmodi, quæ nullis rectis niſi vere parallelis ſeu æquidiſtantibus convenit, non video quo jure culpari poſſit.*]

37. Parallelogrammi & cujuſvis quadrilateri diameter, [*ſive diagonalis,*] eſt recta (A F) per angulos oppoſitos ducta. Fig 17.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus quam quatuor comprehenſæ, multilateræ, ſeu multangulæ, ſeu Græca voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram oritur. Tales ſunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos. Fig. 19.

[40. *Quando linea vel angulus vel figura quævis* biſecari *vel* bifariam ſecari *dicitur; intellige illorum quodvis in duas æquales partes eſſe diviſum:* Item triſecari, *vel* trifariam ſecari *dicitur id quod in tres partes æquales dividitur; atque ita porro.*]

Poſtulata.

POſtulatum, eſt quod facile fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam, in directum & continuum protendere.

3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

Axiomata.

AXioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et, quod uno quovis æqualium majus aut minus eſt, majus quoque aut minus eſt altero æqualium.

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejuſdem [*vel æqualium*] dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ ejuſdem [*vel æqualium*] ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt. [*Item, inæqualium dimidia; vel dupla, tripla, &c. inæqualia erunt.*]

7. Quæ mutuo ſibi congruunt æqualia ſunt.

Non recte Clavius hoc Axioma convertit. Falſum eſt enim, ea quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuo congruere: Diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruunt. Quod ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit converſa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuo congruent; & anguli (*rectilinei*) ſi æquales fuerint, ſibi mutuo congruent. [*Et ſi circuli æquales fuerint, ſibi mutuo congruent; & ſi ejuſdem circuli, vel æqualium circulorum arcus fuerint æquales, ſibi mutuo congruent arcus iſti: Aut ſi quadrata, vel alia quæcumque figura ſimiles æquales fuerint, ſibi mutuo congruent.*]

9. Totum ſua parte majus eſt: [*æquale autem eſt omnibus partibus ſuis ſimul ſumptis.*]

10. Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Fig. 20. Euclidis axioma undecimum eſt: Si In duas rectas (A B, CF) incidens recta (GI) angulos ad eamdem partem interiores (BLQ. FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Hoc vero non eſt clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipſe demonſtrat: videlicet; ſi anguli (B L Q, F Q L) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (A B, C F) numquam concurrent. Quare axioma illud e principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliiſque Geometris rejecimus; eſt enim non axioma, ſed theorema, idque demonſtrabimus poſt Ex defin. 36. Propoſitionem 31. hujus libri. Ejus loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum veritas ex definitione paralleliſmi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur. Hoc eſt, recta, quæ ad parallelarum unam eſt perpendicularis, eſt quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

[*Euclidis axioma undecimum (proprietatibus paralleliſmi demonſtrandis inſerviens,) cuilibet perpendenti ſatis manifeſtum videtur. Quia vero Tacqueto libuit Euclideam Parallelarum*

larum Definitionem loco movere, eique novam ſubrogare, æquum erat ut in Axiomatis hujus Euclidei locum, nova etiam axiomata duo, definitioni ſuæ Parallelarum magis accommoda ſubſtitueret.]

13. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune: & omnes rectæ punctualiter ſe interſecant.

Rectæ AX occurrat recta ZD. ea ſi producatur non perget per DA, ſed in E, ſic ut rectam XA non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex notione ipſa rectæ lineæ evidentiſſimum eſt. [*Imo vero ex ipſa definitione lineæ, quæ magnitudo tantum longa eſt, abſque latitudine, ſatis patet omnes omnium linearum, ſive rectarum, ſive curvarum, ſeu denique rectæ & curvæ interſectiones, puncta eſſe.*] Fig. 21.

Tamen quia nonnulli tam ſubtiliter philoſophantur, ut credant rectas lineas, aliqua ſui parte commiſceri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ AX, AZ partem communem A D. Centro A deſcribatur circulus, ſecans rectas in B & C. tum accipiatur arcus B F æqualis arcui BC, & intelligatur ducta eſſe recta F A.

Rectæ igitur CA & FA eumdem prorſus ſitum habent reſpectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere dicitur commune ſegmentum DA: ergo etiam recta FA habet cum BA commune ſegmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA ſegmentum habent.

Sumatur rurſum arcus FG æqualis prioribus BF, & CB, & intelligatur ducta eſſe recta GA. Rurſum liquet rectas BA, GA, eumdem habere ſitum reſpectu rectæ FA. Sed jam oſtenſum eſt rectam BA habere cum recta FA commune ſegmentum DA. Ergo etiam recta GA cum FA commune habet ſegmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA ſegmentum habent. Eodem prorſus modo oſtendam, ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune ſegmentum DA. Hoc tam immane abſurdum ſequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ CA, BA habere ſegmentum commune. Impoſſibile eſt igitur ut duæ rectæ ſegmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in ſcholis argumenti, quo demonſtratur magnitudinem ex punctis omni-

Digitized by Google

omnino indiviſibilibus numero finitis componi non poſſe: & eſt ejuſmodi. Conſtent, ſi fieri poteſt, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum deſcriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima ſeu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus ſingulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum eſt, rectas illas nuſquam commiſceri, niſi in centro ſolo. Quare dum omnes medias peripherias pertranſeunt, in iis æque multa deſignant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis conſtant, ac proinde omnes inter ſe æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta deſcripta, æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonſtrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ ceteris, quod paſſim ſit decantata, & ex præſenti axiomate immediate pendeat.

[15. *Æqualium circulorum diametri erunt æquales; ut & eorum ſemidiametri ſive radii æquales erunt. Et, ſi duorum circulorum radii (aut diametri) æquales fuerint, circuli erunt æquales. Idem puta de æqualium quadratorum lateribus & diametris; aut de quarumcumque figurarum ſimilium & æqualium lateribus & diametris* (a) *homologis: & converſim, ex æqualitate homologorum laterum aut diametrorum, concludes figurarum ſimilium æqualitatem.*

(a) *Vide def. 11. l. 5. & def. 1. l. 6.*

16. *Porro etiam, majoris circuli diameter major eſt, minoris minor: & viciſſim. Idem puta de quadratorum inæqualium lateribus aut diametris; nec non de figurarum quarumcumque ſimilium & inæqualium lateribus & diametris homologis: & viciſſim.*]

Propoſitionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt, quæ idcirco Theoremata inſcribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requiſitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propoſitiones, primus numerus deſignat propoſitionem, littera (*l*) cum numero ſequenti librum denotat: ut ſi occurrat (*per* 5. *l.* 3.) ita leges; (per propoſitionem quintam libri tertii.) Figura quærenda ſemper eſt inter figuras ejus libri, in quo tum verſamur: citationes reliquæ facile intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propoſitiones illuſtriores ſunt 32, 35, 37, 41, 44, 45, 47.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta (AB) triangulum æquilaterum conſtituere. Fig. 13.

Centro A, intervallo AB (a) deſcribatur circulus FCB; (a) Per poſtul. 3. & centro B, intervallo eodem B A deſcribatur circulus ACL, priorem ſecans in puncto C, ex quo ducantur rectæ CA, CB.

Dico triangulum ACB factum eſſe æquilaterum. Nam recta AC eſt (b) æqualis rectæ AB, cum ſint ejuſdem circuli FCB ſemidiametri; & recta BC etiam æqualis eſt eidem rectæ BA, cum ambæ ſint ſemidiametri circuli LCA. Ergo AC, BC (c) ſunt æquales inter ſe: ac proinde omnia latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangulum ACB & (d) æquilaterum eſt, & ſuper data recta A B conſtitutum, quod erat faciendum.

(b) Per def. 12.
(c) Per axio. 1.
(d) Per def. 25.

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum (A) data rectæ (EF) æqualem ponere. Fig. 14.

Accipe circino (e) intervallum EF, & transfer ex A in D, erit recta AD par datæ EF.

(e) Poſtul. 3.

PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.) Fig. 14.

Accipe circino (f) intervallum minoris datæ EF, & transfer in majorem ex G in I.

(f) Poſtul. 3.

PROPOSITIO IV.

Si duorum triangulorum (X, Z) latus unum (BA) uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) ſit æquale, anguliquе (A & L) ab illis lateribus facti, etiam ſint æquales; æquabuntur etiam & baſes (BC, FI,) & tota triangula (X, Z,) & reliqui ad baſim anguli (B, F & C, I) qui lateribus æqualibus oppenuntur. Fig. 15.

Nam

Digitized by Google

Nam ſi intelligamus triangulum Z triangulo X ſuperpo-
(a) *Per axio.* 8. ni, latera LF, LI perfecte congruent (*a*) ſibi æqualibus lateribus AB, AC, ſic ut puncta tria L, F, I, cadant ſupra tria puncta A, B, C. Ergo tum etiam baſis FI tota cadet ſupra totam baſim BC. Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula ſibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Fig. 15. Simili fere ratiocinio, theorema ſequens, cujus mox erit uſus, licebit demonſtrare.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipſis F & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F & I, ſi
(b) *Per axio.* 8. latus FI imponas lateri ſibi æquali BC, illi (*b*) congruet. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, et-
(c) *Per axio.* 8. iam (*c*) FL cadet ſupra BA, & IL ſupra CA. Ergo etiam punctum L incidet in punctum A; (ſi enim caderet extra A, latera FL, IL non inciderent in latera BA, CA.) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia.

PROPOSITIO V.

Fig. 16. T*Rianguli Iſoſcelis ſeu æquicruris ad baſim anguli* (*A*, *C*) *æquales ſunt.*

Intelligatur triangulum ABC bis poſitum; ſed ſitu converſo *cba*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *cba*, ex hypotheſi æquale eſt latus AB, lateri *cb*, & latus CB
(d) *Per* 4. *l.* 1. lateri *ab*, & angulus B angulo *b*; etiam (*d*) ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum. Iidem enim ſunt anguli C & *c*.

Corollarium.

ÆQuilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum eſt.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO VI.

SI *in triangulo* (*ABC*) *duo anguli* (*A & C*) *æquales fuerint, etiam latera* (*AB, BC*) *iis oppoſita, æqualia erunt.* Fig. 26.

Intelligatur ttiangulum ABC bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *c b a* æquatur latus unum AC uni lateri *c a*, & angulus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia (*a*) erunt æqualia, ac proinde latus AB æquabitur lateri *c b*; quod erat demonſtrandum. Eædem enim ſunt lineæ CB & *c b*.

(a) *Per Schol. prop. 4.*

Corollarium.

ÆQuiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum eſt.

PROPOSITIO VII.

EST *propter 8. quæ ſine illa ſeorſim propoſita demonſtrabitur.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. 27.

SI *duo triangula* (X, Z) [vel X, Y] *habuerint omnia latera ſibi mutuo æqualia* (*AC ipſi EF; CB ipſi FI, AB ipſi EI;*) *etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales* (*C ipſi F; A ipſi E; B ipſi I.*)

Ponatur enim latus AB ſupra ſibi æquale EI, [*ita ut punctum A coincidat cum E, ac* B *cum* I, *& reliqua latera cadant ad eamdem partem rectæ AB vel EI.*] Tum vero punctum C, vel incidet in punctum F vel non. Si incidat (*b*) æquales erunt. *Cadet vero punctum C in punctum F. Nam*

(b) *Per axio. 7.*

Centro E, ſemidiametro EF, deſcribatur circulus; & centro I, ſemidiametro IF, deſcribatur circulus, Punctum C ob latera

tera æqualia erit in circuli utriuſque circumferentia, atque adeo in utriuſque circumferentiæ communi interſectione F. Q. E. D.

Fig. 28. (a) Per 5. l. 1. (b) Per 5. l. 1. Si C cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypotheſim latera EF, AC æquantur, erit (a) angulus EFC par angulo ECF. Ergo IFC major erit quam ECF. Ergo IFC multo major erit quam ICF. Rurſum, quia per hypotheſim IF, BC æquantur, erit ICF (b) par ICF. Ergo IFC & multo major eſt quam ICF, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo, &c.

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſulto prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque vero difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione jam poſita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29. *Datum angulum rectilineum (IAL) bifariam ſecare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturque recta FA. Hæc angulum biſecabit.

(c) Per axio. 15. (d) Per 8. l. 1. (e) Per def. 40. Ducantur enim BF, CF; triangula FAB, FAC ſunt ſibi mutuo æquilatera; nam latera AB, AC ex conſtitutione æqualia ſunt, & latera BF, CF, quia (c) æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquantur; & AF utrique triangulo commune eſt. Ergo anguli BAF, CAF (d) æquales ſunt. Biſectus (e) eſt ergo datus angulus IAL, quod erat faciendum.

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. ſingulas nimirum partes iterum biſecando.

Scholium.

Methodum ſecandi angulos in æquales quotcumque, circino & regula hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur a Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel conchoidis.

Mecha-

Digitized by Google

Mechanice datum angulum in quotcumque ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tamquam centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumque dividas in quot placuerit æquales partes; rectæ enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ, angulum ſecabunt in partes totidem æquales. *Fig.* 30.

PROPOSITIO X.

D*Atam rectam finitam* (*AB*) *ſecare bifariam.* *Fig.* 31.

Super data AB fac triangulum æquilaterum (*a*) AGB, [*vel etiam iſoſceles æqualium crurum AG*, BG.] Angulum ejus G (*b*) biſeca per rectam GC. Eadem biſecabit rectam AB datam. (a) *Per* 1. *l.* 1. (b) *Per præced.*

Nam in triangulis X, Z, latus CG eſt commune, & per conſtructionem GB, GA æqualia, anguli que iis contenti AGC, BGC æquales. Ergo baſes AC, BC (*c*) æquantur. Biſecta (*d*) eſt ergo data AB. Quod erat faciendum. (c) *Per* 4. *l.* 1.

Pro praxi ſatis erit centris A & B duos æquales circulos deſcribere, ſe ſecantes in G & L, ac ducere rectam GL. (d) *Per def.* 40.

PROPOSITIO XI.

E*X dato puncto* (*A*) *in data recta* (*LI*) *perpendicularem excitare.* *Fig.* 32.

Circino cape æquales AC, AF. Centris C & F deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim CB, FB. Triangula X & Z ſibi mutuo æquilatera ſunt [*propter latus AB commune*, *latera AC*, *AF æqualia per conſtructionem*, *& latera BC*, *BF æqualia per axio.* 15.] Ergo anguli CAB, FAB (*e*) æquales ſunt. Ergo BA (*f*) perpendicularis eſt. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum. (e) *Per* 8. *l.* 1. (f) *Per defin.* 14.

Praxis tum hujus quam ſequentis expeditur facillime præſidio normæ.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. EX *dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A deſcribe circulum, qui ſecet datam LQ in C
(a) Per 10. l. 1. & I. Rectam CI biſeca (a) recta AB. Ea erit perpendicularis.

Ducantur enim AC, AI. Quoniam per conſtructionem triangula X & Z ſunt ſibi mutuo æquilatera; erunt anguli
(b) Per 8. l. 1. (b) CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis (c) eſt.
(c) Per def. 14. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34. RECTA *(BA) ſuper rectam (CF) conſiſtens, aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.*

Nam ſi BA inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC, BAF utrimque recti. Si vero BA inſiſtat
(d) Per 11. l. 1. oblique, excitetur (d) perpendicularis AL. Quia tum anguli inæquales CAB, FAB eumdem locum occupant, quem duo recti CAL, LAF, ac proinde iis congruunt,
(e) Per axio. 7. erunt (e) his illi æquales. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

1. EOdem modo demonſtrabitur, ſi plures rectæ quam una, eidem rectæ ad idem punctum inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 37. 2. Duæ rectæ ſe invicem ſecantes BAC, FAL efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propoſ.

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti, conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. SI *duæ rectæ (XR, ZR) ad idem utrimque punctum rectæ QR faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus*

duobus rectis æquales; (XR, ZR *) unam rectam efficient.*

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB (*a*) conficient duos rectos, quod (*b*) eſt abſurdum, cum ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant. (a) *Per* 13. *l.* 1. (b) *Contra axio.* 9.

Coroll. *Hinc in Catoptrica colligimus lucis radium, inter reflectendum, per angulum reflexionis angulo incidentiæ æqualem tendentem, per viam omnium breviſſimam ferri. Ubi nempe anguli* BED, AEF *æquantur, lineæ AE & EB ſimul ſumptæ, lineis quibuſcunque, puta AF & FB ſimul ſumptis ſunt breviores. A puncto enim B* (c) *demittatur linea perpendicularis BC, & fiant BD & CD æquales, ducantur etiam EC & FC. In triangulis BED & CED, cum latus DE ſit utrique commune, & latus BD lateri DC ex conſtructione æquale, Angulus etiam BDE angulo CDE* (d) *æqualis;* (e) *æquabuntur reliqua omnia; eritque BE æqualis CE, anguluſque BED angulo DEC æqualis. Et, ſi æqualibus BE, CE addatur EA, erit ſumma linearum BE & EA æqualis ſummæ linearum CE & EA. Et cum ex hypotheſi æquentur anguli BED, AEF; & angulus BED antea oſtenſus ſit æqualis angulo DEC; ergo & angulus AEF æquatur* (f) *angulo DEC; & addito communi angulo DEA, ſumma angulorum DEA, DEC æquabitur ſummæ angulorum DEA, AEF. Sed anguli DEA, AEF conficiunt* (g) *duos rectos. Ergo & anguli DEA, DEC ſunt duobus rectis æquales, & proinde (per hanc prop.) lineæ AE, EC unam rectam CA efficiunt, quæ ex ante demonſtratis, æquatur ſummæ rectarum AE & EB.* Fig. 37. (c) *Per* 12. *l.* 1. (d) *Per def.* (e) *Per* 4. *l.* 1. (f) *Per axio.* 1. (g) *Per* 13. *l.* 1.

Eodem modo in triangulis BDF, CDF, demonſtrabitur æqualitas linearum BF & CF; itemque addito communi AF, oſtendetur ſummam linearum AF & FB, ſummæ linearum AF & FC æqualem eſſe. Sed CA, (hoc eſt, ſumma linearum AE & EB) minor eſt quam ſumma linearum AF & FC, (hoc eſt, quam ſumma linearum AF & FB) per definitionem rectæ lineæ, quæ minima eſt omnium quæ inter puncta A & C duci poſſunt. Ergo lineæ AE & EB ſimul ſumptæ, lineis AF & FB ſimul ſumptis ſunt breviores. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI *duæ rectæ (* BC, FL *) ſe ſecuerint (in* A, *) erunt anguli ad verticem (* A *) oppoſiti, æquales.* Fig. 38.

 Nimi-

Nimirum LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam quia
(a) *Per* 13. *l.* 1. BA inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB (*a*) pares duobus
(b) *Per eand.* rectis. Et quia F A inſiſtit rectæ BC, erunt (*b*) quoque
FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo (*c*) duo ſimul LAB,
(c) *Per axio.* 1. F A B æquantur duobus ſimul CAF, FAB. Ablato igitur
(d) *Per axio.* 3. communi FAB, remanent (*d*) æquales LAB, CAF. Eodem
modo oſtendam æquales eſſe BAF, LAC.

Fig. 39. Coroll. *Hinc illi qui ſphærulis eburneis & proinde elaſticis ludunt, pilam adverſarium repercutiendo amovere diſcant. Sit ſphærularum altera impellenda B, altera quæ impellenda eſt A; Latus vero rectilineare C D. Eſto linea B E lineæ C D*
(e) *Per* 12. *l.* 1. (e) *perpendicularis, & ſit D E æqualis B D, & ducatur recta A E ſecans C D in F, & jungatur B F. Si pila ſecundum rectam A F E impellatur, ad punctum F ita reflectitur, ut poſt reflexionem ad B tendat. In triangulis enim B F D, E F D, Latus F D, eſt utrique commune, & Latus D B lateri D E æquale, & anguli ad D æquales ſive recti.*
(f) *Per* 4. *l.* 1. *Tota itaque triangula* (f) *æquantur; & proinde angulus B F D angulo D F E, ſive ad verticem oppoſito* (g) *A F C*
(g) *Per* 15. *l.* 1. *æqualis eſt. Angulus autem A F C eſt angulus incidentiæ, & Angulus B F D angulus reflectionis: qui cum in omnibus corporum perfecte elaſticorum reflectionibus ſibi invicem æquentur, liquet pilam A elaſticam verſus E tendentem, ad pilam B poſt reflectionem pergere, eamque impellere debere. Q.E.D.*

PROPOSITIO XVI. XVII.

C*Ontinentur in prop.* 32. [Et in ejuſdem prop. corollariis demonſtrantur.] *Neque ante illam adhibentur.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 40. I*N omni triangulo, angulus* (*A*) *major eſt, qui majori lateri* (*BO*) *opponitur:* (*B*) *minor, qui minori* (*AO.*)

(h) *Per* 6. *l.* 1. Nequit A eſſe par B, alias (*h*) latera BO, AO æquarentur, contra hypotheſim. Neque etiam A minor eſſe quam B. Nam ſi A minor eſt, B major, poterit intra angulum B, per rectam B F, fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6. æquales erunt B F, A F, & ſi addas utrique O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor eſt quam

quam BO. Ergo etiam BF, FO minores ſunt quam BO, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN omni triangulo, latus (BO) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo: (AO) minus, quod minori (B.) Fig. 40.

Eſt converſa prioris. BO non eſt minus quam AO, alias per 18. angulus A eſſet minor angulo B, contra hyp. Neque etiam BO æquale eſt AO, alias per 5. anguli A, B æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo BO majus eſt quam AO. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo qualibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedi inſtar axiomatis; immediate ſiquidem patet ex definitione Archimedea lineæ rectæ, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

SI a terminis unius lateris (AB) intra triangulum duæ rectæ junguntur (AO, BO,) hæ lateribus trianguli (AC, BC) minores ſunt, majorem vero angulum (AOB) comprehendunt. Fig. 41.

1. Pars. Produc AO in F. AC, CF ſunt (a) majores quam AF. Addita ergo communi FB, erunt AC, BC majores quam AF, FB. Rurſum OF, BF ſunt (b) majores quam OB. Addita ergo communi AO, erunt AF, FB majores quam AO, OB. Ergo AC, CB ſunt multo majores, quam AO, OB.

(a) Per 20. l. 1.
(b) Per eand.

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Ea interim non utemur.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXII.

Fig. 42. EX *datis tribus rectis* (BO, LB, LO) *quarum duæ qualibet reliqua ſint majores, triangulum conſtituere.*

Aſſumatur datarum una BL, atque una ejus extremitate B accepta pro centro, intervallo alterius datæ BO deſcribatur arcus.

Deinde accepta pro centro extremitate altera L, intervallo tertiæ LO deſcribatur arcus priorem ſecans in O: ducanturque rectæ BO, LO. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 42. AD *datum in recta punctum* (B) *angulum efficere æqualem dato* (A).

Ducatur utcumque CF ſecans latera dati anguli A. In data recta ex B accipe BL parem AF. Centro B intervallo AC deſcribe circulum: item alium centro L intervallo FC qui priorem ſecet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A.

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo per 8 anguli B & A ſunt æquales.

Fig. 43. Cor. 1. *Hinc lineam inacceſſam AB metiri licet. A puncto enim quocumque C obſervetur angulus ACB, & menſurentur lineæ AC, BC: & in plano quocumque acceſſibili, ad punctum F, ſuper recta infinita EF, fac angulum angulo C æqualem, & menſurentur lineæ FD, FE, lineis AC & BC reſpective æquales, & jungatur DE: Erit hæc æqualis lineæ inacceſſæ AB. Nam in triangulis ACB, DFE, propter latera AC, CB lateribus DF, FE reſpective æqualia, & angulum C angulo F æqualem, erit* (a) *baſis AB baſi DE æqualis.*

(a) Per 4. l. 1.

Fig. 44. Cor. 2. *Hinc etiam alia ratione, Thaletem ſecuti, lineam inacceſſam metiri diſcimus. Sit linea inacceſſa AD cui ad extremum ejus punctum A* (b) *erigatur perpendicularis AC, & capiatur angulus ACD, eique ex altera parte lineæ AC,* (c) *æqualis conſtituatur angulus ACB, &* (d) *producantur DA,*

(b) Per 11. l. 1.
(c) Per hanc pr.
(d) Per poſtul. 2.

DA, CB donec concurrant in B. Linea AB acceſſibilis, erit lineæ inacceſſæ AD æqualis. Nam in triangulis ABC, ADC, ob CA ipſi BAD perpendicularem, anguli ad A ſunt recti, & proinde æquales; & anguli ad C ſunt æquales per conſtr. & latus AC commune. Ergo (a) *omnia reliqua erunt æqualia, & latus AB lateri AD æquale erit.* (a) *Per Schol. poſt p. 4. l. 1.*

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hic nonnulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere.

Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tamquam centro deſcribitur, ut patebit ex prop. ultima lib. 6. *Fig. 45.*

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur eſſe angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus eſſe graduum 90. Similiter quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in 180. gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis, praxes angulorum ſunt.

1. Ad datum in recta BL punctum B, angulum ſtatuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice, tamquam centro, inter latera, arcum deſcribe GF. Centro B puncto dato, deſcribe eodem intervallo arcum LZ, ex quo aufer LO parem CF. Per B & O duc rectam: erit LBO par dato A. *Fig. 46.*

2. Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facilline per ſemicirculum corneum tranſparentem, in 180. gradus diviſum. Centrum ſemicirculi pone ſupra P verticem anguli, & ſemicirculi radium PL ſupra anguli latus PQ. Arcus LO, inter anguli crura interceptus, oſtendet quot graduum ſit datus angulus. *Fig. 47.*

3. Angulum conſtruere datos continentem gradus 42. duc rectam XQ in qua ſigna punctum P. Super P pone ſemicirculi centrum, ejuſque ſemidiametrum PL ſupra PQ. Ab L numera gradus 42. uſque in O. Per O ex P ducta recta dabit angulum OPL graduum 42. *Fig. 47.*

Horum omnium demonſtratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

[Coroll. *Cognito angulo BAF, cognoſcitur una ejuſdem complementum ad duos rectos CAF. Sit v. gr. angulus BAF graduum 70. erit angulus CAF graduum* 110. *Numeri* *Fig. 38.*

 enim

enim iſti ſimul additi, gradus 180. angulorum rectorum duorum menſuram conficiunt.]

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 48. *SI duo triangula (B A C, B A F) duo latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) majorem habeat altero (B A C,) habebit quoque baſim B F majorem baſi (B C)*

Et ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

[*Si latera B A, A F (ſeu B A, A C) ſint inæqualia; applicentur ad ſe invicem latera minora B A. Tum*]

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia A C, A F ponuntur æquales. Ergo BF cadit [*intra*
(a) Per def. 4. (a) *circulum*] ſupra C; [*hoc eſt, inter punctum A & punctum C.*] Junge C F. Angulus B C F eſt major angulo A C F, hoc eſt, per 5. angulo A F C, hoc eſt, multo
(b) Per 19. l. 1. major angulo B F C. Ergo [*In triangulo B C F,*] (*b*) B F oppoſita majori angulo B C F, major eſt quam B C oppoſita minori B F C.

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

[*Angulus enim BAF non eſt minor angulo BAC; nam*
(c) Per primam partem hujus. *ſi ita, baſis BF baſi BC minor* (c) *eſſet, contra hypotheſim: Sed nec æqualis eſt angulus BAF angulo BAC; quia*
(d) Per 4. l. 1. *ſi eſſet, baſis B F baſi B C* (d) *æquaretur, iterum contra hypotheſim. Cum vero angulus B A F angulo B A C nec minor ſit, nec æqualis; neceſſe eſt ut ſit major.* Q. E.D.]

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25. *SI duo triangula (X, Z) duos angulos duobus æquales habuerint, alterum alteri, (B ipſi F, & C ipſi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit, (ut B C, F I,) vel quod uni æqualium angulorum opponitur, (ut A C L I:) reliqua omnia erunt æqualia.*

Ponan-

Digitized by Google

Ponantur primo æqualia eſſe latera BC, FI, inter æquales angulos poſita: tum vero reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI, æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. prop. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

[Scholium. *Quædam hoc loco de perpendiculari in triangulo iſoſcelio, quæ baſim & angulum verticalem biſecat, inſerere viſum eſt. Sit ABC triangulum iſoſceles, cujus vertex A, baſis BC, crura æqualia AB, AC. Dico,* Fig. 49.

1. *Si ab angulo verticali A ducatur* (a) *recta AD baſi perpendicularis; biſecabit ea tum baſim, tum angulum verticalem. In triangulis enim ABD, ACD, propter latera AB, AC invicem* (b) *æqualia, & AD utrique commune, & angulos lateribus æqualibus oppoſitos etiam æquales, nempe* (c) *B = C, & ADB =* (d) *ADC; omnia reliqua erunt* (e) *æqualia, nempe latus BD lateri DC, & angulus BAD angulo DAC. Quare perpendicularis AD biſecat* (f) *tum baſim BC, tum angulum verticalem BAC.*

2. *Si recta AD ab angulo verticali ducta biſecet baſim, biſecabit etiam angulum verticalem, & baſi perpendicularis erit. Cum enim baſis BC biſecta ſit in D, triangula ABD, ACD erunt ſibi mutuo æquilatera, ac* (g) *proinde ſibi mutuo æquiangula. Anguli igitur BAD, CAD æquales ſunt, atque adeo,* (h) *biſecatur angulus BAC: anguli etiam ad D æquales ſunt, ac proinde* (i) *AD eſt baſi perpendicularis.*

3. *Si recta AD angulum verticalem biſecet, illa baſim etiam bifariam & perpendiculariter ſecabit. In triangulis enim BAD, CAD, propter latera BA, AD lateribus CA, AD reſpective æqualia, & angulos BAD, CAD illis lateribus contentos, etiam æquales;* (k) *erit baſis BD baſi CD, æqualis, & anguli ad D etiam æquales; ergo recta AD baſim* (l) *bifariam &* (m) *perpendiculariter ſecat.*

4. *Si in triangulo iſoſcelio ABC ducatur recta DE, quæ baſim BC bifariam & perpendiculariter ſecet in D; ea per trianguli verticem A tranſibit. Si enim ſuper DE tamquam axe moveatur pars ſiniſtra EDB trianguli ABC, donec parti dextræ EDC ſuperimponatur; ſibi mutuo* (n) *congruent æquales anguli recti ad D, æqualia latera DB, DC, & æquales anguli B, C. Coincident itaque latera BA, CA, itemque tota triangula BAD, CAD, ac proinde latus DA lateribus BA, CA in uno eodemque puncto A occurrit, hoc eſt, per verticem A trianguli ABC tranſit.*

(a) Per 12. l. 1.
(b) Per hypoth.
(c) Per 5. l. 1.
(d) Per def. 14.
(e) Per 26. l. 1.
(f) Per def. 40.
(g) Per 8. l. 1.
(h) Per def. 40.
(i) Per def. 14.
(k) Per 4. l. 1.
(l) Per def. 40.
(m) Per def. 14.
(n) Per axio. 8.

5. *Si*

Digitized by Google

5. *Si recta AD a trianguli ABC vertice A in baſim BC cadens, eam ſecet bifariam & perpendiculariter; triangu-*
(a) Per def. 26. *lum ABC erit iſoſceles, hoc eſt, crura, AB, AC erunt* (a) *æqualia. In triangulis enim ADB, ADC, propter latera AD, DB lateribus AD, DC reſpectivè æqualia, anguloſque*
(b) Per def. 14. *ad D illis lateribus contentos rectos, ac proinde* (b) *æquales, erit etiam latus AB lateri AC* (c) *æquale.*

(c) Per 4. l. 1. 6. *Si recta AD trianguli ABC angulum A biſecans, ſit lateri oppoſito BC perpendicularis; triangulum ABC eſt iſoſceles, cujus æqualia latera ſunt AB, AC. Nam in triangulis ADB, ADC, propter angulos DAB, DAC æquales, angulos ad D rectos & proinde æquales, ac latus DC inter æqua-*
(d) Per 26. l. 1. vel per Schol. p. 4. l. 1. *les angulos, utrique commune; erit* (d) *latus AB lateri AC æquale.*]

Fig. 50.

PROPOSITIO XXVII.

SI *duas rectas (AB, CF) parallelas ſecuerit recta (GO:) erunt* 1. *æquales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL.)* 2. *Externus (GLB) æqualis interno ad eamdem partem (LOF,) (item GLR ipſi LOC.)* 3. *Duo ad eamdem partem interni ſimul (ALO, COL) æquales duobus rectis. (item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.)*

Fig. 51. 1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ.
(e) Per axio. 11. Erunt (*e*) hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque
(f) Per axio 2. (*f*) ex parallelis auſerunt partes RL, QO. Ergo triangula X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo (*g*) anguli RLO,
(g) Per 8. l. 1. QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos BLO, COL æquales eſſe. Nam quia tam
(h) Per 13. l. 1. BLO, ALO quam COL, FOL æquantur (*h*) duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipſis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

(i) Per 15. l. 1. 2. Pars. GLB æquatur ad verticem (*i*) oppoſito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF; quod erat alterum. [*Eodem modo probatur angulum externum GLR angulo interno ad eamdem partem LOC æqualem eſſe.*]

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL
(k) Per 13. l. 1. cum COL (k) facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos; quod erat tertium. [*Et pari modo, duos angulos BLO, FOL duobus rectis æquales eſſe patebit.*]

Coroll.

Coroll. *Hinc, Eratoſthenem imitati, Telluris ambitum* Fig. 52.
metiri diſcimus. Ille enim obſervavit Solem Syene, urbi Ægyptiaca, ipſo ſolſtitii æſtivi die perpendiculariter impendere: & eodem die gnomonis ope invenit Solem ab Alexandria, urbis etiam Ægyptiaca, ſub eodem fere meridiano ſita, vertice gradus fere ſeptem cum quinta gradus parte diſtare: atque urbes iſtas ſtadia 5000 *circiter diſtare novit. Unde vi præſentis propoſitionis ambitum terræ hoc modo definivit. Sit A Syene; B Alexandria, ubi gnomon BC erigitur horizonti perpendicularis; Sint DA & EG radii Solares ſibi invicem quoad ſenſum paralleli; DA radius horizonti Syenenſi perpendicularis, per F centrum terræ tranſiens; EG vero radius horizonti Alexandrino obliquus, per gnomonis apicem tranſiens, & cum gnomone angulum GCF graduum* $7\frac{1}{5}$ *continens. Cum vero angulus GCF æqualis ſit angulo alterno AFB, cujus menſura eſt arcus AB graduum* $7\frac{1}{5}$; *Telluris ambitum hac analogia adinvenit: Ut ſe habent gradus* $7\frac{1}{5}$ *ad ſtadia* 5000; *Ita integer circulus graduum* 360 *ſe habebit ad* 250000; *ambitum telluris iiſdem ſtadiis definiendum. Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL; æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ. Fig. 53.

Si negas, ſit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parellela.

Ergo (*a*) angulus XLO par eſt alterno FOL; quod fieri non poteſt, cum per hyp. ALO par ſit eidem FOL. (a) Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) fecerit externum angulum (GLB) æqualem oppoſito interno (LOF,) vel duos ad eaſdem partes internos ALO, COL) pares duobus rectis erunt (AB, CF) parallelæ. Fig. 50. 51.

Per 15. GLB æquatur ALO oppoſito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur ſibi alterno LOF. Ergo (*b*) AB, CF ſunt parallelæ. (b) Per præced.

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales ſunt, Ergo rurſum AB, CF (*c*) ſunt parallelæ. (c) Per præced.

Corol.

Digitized by Google

Corollarium.

EX ſecunda parte patet omne rectangulum eſſe parallelogrammum.

[Sholium. *Tacquetus trium propoſitionum immediate præcedentium (viz. 27. 28. 29.) ordinem Euclideum immutavit. Quæ enim Euclidi eſt prop. 29. Tacqueto eſt 27. quia nempe prima iſtius propoſitionis pars (a qua partes duæ reliquæ dependent, e nova ſua parallelarum definitione, novisque duobus axiomatis, undecima & duodecima ſtatim ſequitur, quinetiam prop. 28. Tacquetiana, Euclidi eſt 27. quia ex Euclidea parallelarum definitione, ejuſque axiomate undecimo (quæ ambo rejicit Tacquetus) propoſitio illa demonſtratur. Et proinde, prop. 29. Tacqueti, eſt Euclidis 28. Hæc monenda duxi, ne forte, perlectis Tacqueti elementis Euclideis, Tyrones aliorum libris mathematicis operam dantes, errorem aliquem cauſentur, quod Elementi primi propoſitiones 27, 28, 29. pro Tacquetianis 28, 29, 27. reſpective, laudari viderint.*]

PROPOSITIO XXX.

Fig. 50. *SI duæ rectæ (AB, CF) ſunt parallelæ ad eamdem rectam (DN,) erunt inter ſe parallelæ.*

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam ſi omnes ſecentur a recta GO, erit (*a*) angulus externus GLB par interno LDN: eſt vero LDN externus reſpectu DOF, ac proinde (*b*) æqualis. Ergo etiam GLB par eſt LOF. Ergo AB, CF ſunt (*c*) parallelæ.

(a) *Per 27. l. 1.* (b) *Per 27. l. 1.* (c) *Per præc.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 54. *PER datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (CF.)*

Ex A ducatur utcumque AL, ſecans datam FG. Ad punctum A fiat (*d*) angulus LAS par angulo ALF. Erit AS parallela ad CF, ut patet ex 28. cum alterni anguli SAL, FLA ſint æquales.

(d) *Per 23. l. 1.*

Praxis: ducta AL, centro L deſcribe arcum IQ, & centro A eodem intervallo arcum QX; ex quo aufer OB parem IQ. Per A & B ducta recta erit parallela.

De-

Demonſtratio pendet ex 29. l. 3.

Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam CF in Q & O. Arcui QA accipe æqualem ON. Recta AN erit parallela. *Fig. 55.*

Demonſtratio pendet ex 29. lib. 3. & ex 28. hujus, [*& habetur infra, in Lem. ad prop. 16. Theorematum ſelect. ex Archimede.*]

Scholium.

DEmonſtrata jam igitur eſt parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides ejuſque interpretes aſſumunt minus recte, cum non ſit axioma, ſed theorema, cujus veritas non magis per ſe appareat, quam ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſæpius adhibetur, id hoc loco jam facile ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theorema.

SI recta (MA) incidens in rectas (BC, AD) faciat angulos internos ad eaſdem partes (BAD, ABC) duobus rectis minores, rectæ (BC, AD) concurrent verſus eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. *Fig. 56.*

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis ſunt minores; fiant CBA, XAB duobus rectis æquales, [*nempe faciendo angulum XAB* (a) *æqualem angulo MBC:*] Eruntque BC, AX (b) parallelæ, [*& angulus XAB* (c) *major angulo DAB, exceſſu XAD.*] Aſſumo tamquam axioma per ſe notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci poſſe aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major ſit quam AB. Accipiatur ipſi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX ſunt parallelæ, erunt (*d*) alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per conſtr. Ergo etiam (*e*) anguli RZA, XAZ æquales ſunt. Ergo RZ eſt (*f*) parallela ad AX. Sed etiam BC eſt parallela ad AX. Ergo RZ & BC ſunt (*g*) parallelæ. Eſt igitur BC & parallela ad RZ, & incluſa triangulo ARZ. Ergo cum produci in infinitum poſſit, neceſſario occurret aliquando rectæ AZ. Nam neque evadere poteſt per ſibi parallelam RZ, neque pertingere in A, alias duæ rectæ [*vel ſpatium comprehenderent, vel*] haberent commune ſegmentum, [*contra axiomata* 13. *&* 14.] Liquet ergo propoſitum.

(a) Per 23. l. 1.
(b) Per 23. l. 1.
(c) Per def. 12.
(d) Per 27. l. 1.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per 28. l. 1.
(g) Per 30. l. 1.

Demonſtratio Clavii eſt a parallelis independens, ſed prolixiſſima & multum operoſa: Procli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Verum hoc per ſe notum non eſt, ob rationem datam ad def. 36.

Coro.

Corollaria.

Fig. 56. 1. HInc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AD, [*quas recta BA ſecet in B & A; & ad illam partem ipſius BA, ubi rectæ non parallelæ BC, AD convergunt ad ſe invicem, per punctum A,*] duc (*a*) AX parallelam ad BC. Erunt anguli XAB, CBA duobus rectis (*b*) æquales. Ergo DAB, CBA ſunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonſtratum, BC, AD concurrent.

(a) *Per 31. l. 1.* (b) *Per 27. l. 1.*

[2. *Recta infinita AZ ſecans rectam AX, ſecabit quaſvis infinitas BC, RZ ipſi AX parallelas. Cum enim ponantur AX, BC parallelæ, ſeu* (c) *æqualibus intervallis ubique diſtantes, ſecetque recta AZ, ipſam AX; ergo AZ, BC inæqualibus intervallis diſtabunt, & proinde non erunt parallelæ. Quare* (d) *AZ, BC concurrent. Et eodem modo demonſtrabitur rectam AZ concurrere cum alia quavis RZ quæ ipſi AX parallela ducitur.*]

(c) *Per def. 36.* (d) *Per par 1.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 57. O*Mnis trianguli externus quivis angulus* (*FBC*) *duobus internis oppoſitis* (*A & C*) *æqualis eſt.*

Per B duc (*e*) BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC ſecat FA, erit externus angulus FBL interno A (*f*) æqualis. Et quia eaſdem parallelas BL, AC ſecat etiam recta BC, erit LBC ſibi alterno C (*g*) æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique ſimul A & C. Quod erat demonſtr.

(e) *Per 31. l. 1.* (f) *Per 27. l. 1.* (g) *Per eamd.*

Corollaria.

Fig. 57. 1. EXternus angulus (FBC) quolibet internorum oppoſitorum A vel C, major eſt. [*Eſt prop. 16. Euclidis.*]

Fig. 41. 2. Angulorum (C & AOB) eamdem baſim (AB) habentium, major eſt (AOB) qui intra cadit. [*Eſt pars ſecunda prop. 21. cujus demonſtrationem Tacquetus ad hunc locum rejecerat.*]

Producatur enim AO in F. AOB per hanc major eſt quam OFB; & OFB per hanc eamdem major eſt quam C: Ergo AOB multo major eſt quam C.

Fig. 58. 3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) oblique, perpendiculariter vero altera (AF;) hæc cadet verſus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, ſi fieri poteſt, ad partes obtuſi anguli AOC, puta

Digitized by Google

puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus reſpectu recti (*a*) AQB, ac proinde illo major per coroll. 1. quod eſt abſurdum. (a) *Per hypoth.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

O*Mnis trianguli tres ſimul anguli, duobus rectis ſunt æquales*. Fig 59.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus A B in F. Externus angulus F B C duobus internis oppoſitis A & C æqualis (*b*) eſt. Atqui (*c*) FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonſtrandum. (b) *Per 1. partem hujus.* (c) *Per 13. l. 1.*

Aliter. [*Per angulum Q*] ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quam N, C æquales (*d*) ſunt. Sed O, Q, N conficiunt (*e*) duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt: quod erat demonſtrandum. *Fig. 60.* (d) *Per 27. l. 1.* (e) *Per Coroll. 1. p. 13. l. 1.*

Corollaria.

TRes ſimul anguli cujuſvis trianguli [*rectilinei*] æquales ſunt tribus ſimul cujuſcumque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus [*aut recto major*] eſt, reliqui ſunt acuti. [*& angulus qui lateri non maximo opponitur, ſemper* (f) *eſt acutus*.] (f) *Per hos cor. & pr. 18. pr. int*

6. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8. Cum ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cum ſcitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut ſinguli aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis aut ſimul in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit. [*Ex hoc corollario, quod a prop. 26. non dependet; demonſtratur ejuſdem propoſitionis 26. pars ſecunda, ut ibi notat Tacquetus. Huc igitur iſta propoſitio referenda eſt.*]

10. Cum duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11. Cum

11. Cum in Iſoſcele angulus æquiscruribus contentus eſt, rectus, reliqui ad baſim ſunt (*a*) ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti. [*Et ab Iſoſcelis vertice perpendicularis in baſim*, (b) *cadit intra triangulum*]

(a) *Per cor. 6. hujus, & p. 5. l. 1.*
(b) *Per Cor. 3. hujus.*
(c) *Per hanc & cor. p. 5. l. 1.*

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem (*c*) duorum rectorum. Ergo duas tertias unius. [*Cum enim duo recti faciant gradus* 180. *erit tertia pars duorum rectorum, ſive trianguli æquilateri angulus graduum* 60, *& proinde continebit duas tertias anguli recti, ſive graduum* 90.]

Fig. 61.

13. Hinc anguli recti (BAC) facillima triſectio; ſi ſuper AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum FAC ſint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 58.
(d) *Per 29. l. 1.*

14. Perpendicularis (AF) eſt breviſſima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo (*d*) AF minor quam AO quælibet.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantum una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Fig. 62.
(e) *Per hanc prop.*

16. *Hinc etiam ex prima parte hujus propoſitionis aſtrorum* parallaxin *ſive loci veri atque viſi differentiam definite diſcimus. Sit A Telluris centrum; B Locus Obſervatoris in ejuſdem ſuperficie. Sit* DBC *angulus aſtri C a vertice per obſervationem notus, ſive diſtantia angularis aſtri a vertice* viſa. *Eſt vero Angulus DAC diſtantia angularis vera. Trianguli autem ABC angulus externus obſervatione datus* DBC, *angulis duobus internis oppoſitis* (e) *BAC & BCA æqualis eſt; Atque adeo angulus BCA eſt angulorum DBC & DAC differentia. Si itaque angulus A, computatione notus, ex angulo DBC, obſervatione noto ſubducatur, differentia angulorum iſtorum BCA, quam* Parallaxin *dicimus, pariter innoteſcet. Q. E. I.*

[17. *Liquet etiam e ſecunda parte hujus prop. Trianguli cujuſcumque duos quoſvis angulos duobus rectis minores eſſe; quæ eſt prop. 17. Euclidis a Tacqueto omiſſa.*

Fig. 13.
(f) *Per 18. l. 1.*

18. *In triangulo rectangulo ſcaleno, ille ex angulis acutis, qui laterum angulum rectum comprehendentium majori opponitur, eſt ſemirecto major, & qui opponitur minori eſt ſemirecto minor. Acuti enim anguli ſimul ſumpti, per cor. 6. hujus, angulum rectum conficiunt. Ergo ille qui majori lateri opponitur eſt* (f) *ſemirecto major; qui minori, ſemirecto minor.*

Fig. 63.

19. *Hinc turris aut puncti cujuſvis elevati altitudinem, umbræ ſolaris ope, metiri licet. Ubi enim Sol gradus* 45. *ſupra horizontem elevatur, erunt turrium umbræ in horizontem projectæ, earum altitudini exacte æquales. Ob angulum*

Digitized by Google

enim ABC rectum, & ACB (a) *ſemirectum; erit angulus BAC ſemirectus, per cor. 6. hujus. Et cum anguli ad baſim AC ſint æquales, latera AB, BC æqualia* (b) *erunt. Data itaque menſurande recta BC, datur etiam AB turris altitudo ſupra horizontem.*

(a) Per Schol. poſt p. 23. l. 1.

(b) Per 6. l. 1.

20. *Hinc lineam inaceſſam AB metiri licet. Triangulum enim æquilaterum quodcumque BDE, puncto ſuo B ac latere BD, ad lineæ inacceſſæ BA punctum B ſecundum eamdem BA ſupponatur adjectum: & a puncto B per latus BE, tamquam dioptram, puncta quæcumque in recta BC poſita obſerventur. Removeatur demum triangulum BDE ſecundum rectam BC hac illac, donec collimando per latus trianguli ED ſive CF, punctum A inacceſſum, in eadem linea CF producta, poſitum cernatur; & linea acceſſibilis BC, lineæ inacceſſæ AB æqualis erit. In triangulis enim ABC, DEB, propter angulum B communem, & angulos C, E æquales,* (c) *erunt etiam anguli A, D æquales. Sed triangulum BDE ex hypotheſi eſt æquilaterum, & proinde* (d) *æquiangulum: Ergo etiam triangulum BAC eſt æquiangulum, & proinde* (e) *æquilaterum. Si itaque lineam acceſſibilem BC metiamur, lineæ etiam inacceſſæ BA menſuram habemus.* Fig. 64.

(c) Per cor. 9. hujus.

(d) Per cor. p. 5. l. 1.

(e) Per cor. p. 6. l. 1.

Scholium.

HUjus pulcherrimi, fecundiſſimique theorematis, cujus per Matheſim univerſam uſus prope immenſus, inventor eſt Pythagoras teſte Eudemo veteri Geometra. Frequentiſſime ejuſdem meminit Ariſtoteles, qui illud etiam exemplum ſtatuit perfectiſſimæ demonſtrationis. Sed quemadmodum ex hac propoſitione jam didicimus, quot rectis angulis, figuræ trilateræ anguli æquivaleant, ita ejuſdem beneficio cujuslibet figuræ rectilineæ ſive interni, ſive externi anguli, quot rectos conficiant, præclare innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theorema 1.

OMnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos. Fig. 65.

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt (f) rectos quatuor.

(f) Per 32. l. 1.

Theorema 2.

OMnes ſimul anguli cujuſcumque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ. Fig. 66.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula quot habet latera. Quare cum ſingula triangula (a) conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A, (b) conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

(a) Per 32. l. 1. (b) Coroll. 3. p. 13. l. 1.

Hinc patet omnes ejuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; Quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: a producto aufer 4. reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 67. OMnes ſimul externi anguli cujuſcumque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos.

Nam ſinguli figuræ interni anguli, cum ſingulis externis, conficiunt duos (c) rectos. Ergo interni ſimul omnes cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.

(c) Per 13. l. 1.

Mira ſane hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt; ex qua illud etiam conſequitur, omnes cujuſcumque ſpeciei rectilineas figuras, æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 68. *SI duas rectas æquales & parallelas (A B, C F) jungant duæ aliæ (AC, B F;) erunt etiam illæ æquales & parallelæ.*

Parallelas AB, CF ſecet AF. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli BAF, CFA (d) æquales. Ponitur autem latus AB æquale lateri CF, & AF utrique triangulo eſt commune. Ergo (e) baſes BF, AC æquantur; (quod erat primum,) Et anguli ad baſim AFB, FAC ſunt æquales: ac pro-

(d) Per 27. l. 1. (e) Per 4. l. 1.

proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC æquales. Ergo (*a*) AC, BF ſunt etiam parallelæ, Quod erat alterum.

(a) *Per* 28. *l.* 1.

[Sholium. *Si duas rectas parallelas & inæquales* (*AB, OC*) *jungant duæ aliæ* (*AO, BC*;) *concurrent tandem iſtæ jungentes, ſi ultra parallelarum minorem* (OC) *ſatis producantur. Si enim a parallelarum majori BA, capiatur* (b) *BR minori æqualis, & jungatur RO; erunt RO, BC* (c) *parallelæ, & anguli ad eamdem partem interni, B, ORB ſimul ſumpti, duobus rectis* (d) *æquales. Sed trianguli ORA externus angulus ORB, uno internorum oppoſitorum OAR* (e) *major eſt, & proinde anguli B, OAB ſimul ſumpti, ſunt duobus rectis minores, adeoque recta AO, BC ultra OC producta, tandem* (f) *concurrent. Q. E. D.*]

Fig. 70. (b) *Per* 3. *l.* 1. (c) *Per* 33. *l.* 1. (d) *Per* 27. *l.* 1. (e) *Per cor.* 2. *pr.* 32. *l.* 1. (f) *Per Schol. poſt pr.* 31. *l.* 1.

PROPOSITIO XXXIV.

P*Arallelogrammi oppoſita latera & anguli æquantur, ipſumque a diametro biſecatur.* Fig. 68.

Quoniam AB, CF ſunt (*g*) parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt alterni BAF, CFA (*h*) æquales. Item quia AC, BF ſunt (*i*) parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt (k) alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis eſt. Eodem modo oſtendam B & C æquales eſſe. Quod erat primum.

(g) *Per def.* 35. (h) *Per* 27. *l.* 1. (i) *Per def.* 35. (k) *Per* 27. *l.* 1.

Quia vero jam oſtendi triangula Q, R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipſi CFA, & CAF ipſi BFA, erunt (*l*) etiam latera AB ipſi FC, & BF ipſi CA, æqualia, itemque ipſa triangula.

(l) *Per* 26. *l.* 1.

[Cor. 1. *Omne parallelogrammum, ut ACEF, quod unum angulum A rectum habet, erit rectangulum, hoc eſt, habebit omnes angulos rectos. Nam quia rectas parallelas AF, CE ſecat recta CA, efficiet angulos A, C, internos ad eamdem partem, duobus rectis* (m) *æquales: Cum vero A ſit angulus rectus, etiam C rectus erit: Unde per hanc prop. anguli E, F, angulis A, C reſpective oppoſiti, erunt quoque recti. Eodem modo conſtabit parallelogramma quæ unum angulum uni æqualem habent, eſſe æquiangula.*]

Fig. 31. (m) *Per* 27. *l.* 1.

Cor. 2. *Hinc Montium tam altitudines ſupra horizontem, quam lineas horizontales metiri diſcimus. Sit ABC latus montis, cui applica ingentem normam, aut quod normæ inſtar eſt, ADB, ea ratione, ut latus AD ſit horizonti parallelum, & latus DB horizonti perpendiculare;* & (n) *completo parallelogrammo DH, erit* (*per hanc prop.*) *latus AD*

Fig. 69. (n) *Per* 31. *l.* 1.

Digitized by Google

[a] Per 30. l. 1. *æquale rectæ HB, ipſi AD & horizonti* (a) *parallelæ; & DB æquale rectæ AH, eidem DB, ut & horizonti perpendiculari. Applica deinde inferius a puncto B ad punctum C; & completis parallelogrammis EF, BG, erit itidem recta EB æqualis CF, & EC æqualis BF ſive HG, prout & BH ſive DA æquatur ipſi FG: atque ita porro, Latera horizonti parallela AD, BE, &c. ſimul addita, dabunt lineam horizontalem GC: & latera perpendicularia BD, EC, &c. ſimul addita dabunt altitudinem AG.*

Fig. 63. Cor. 3. *Hinc etiam ope quadrantis Aſtronomici, Turris altitudinem AB invenire licet. Ubi enim elevationis angulus in quadrante eſt ſemirectus obſervatori ad E, fiat DE horizonti perpendicularis, & æqualis oculi obſervatoris altitudini, & ab oculo D* (b) *ducatur DF ipſi EB parallela, eritque BD parallelogrammum* (c) *rectangulum, & latus FB lateri DE, ſive altitudini obſervatoris oculi* (d) *æquale, latus autem DF æquale lateri EB, ſive diſtantiæ obſervatoris a turre. Sed in triangulo AFD, propter angulum AFD* (e) *rectum, & angulum elevationis ADF* (f) *ſemirectum, erit & angulus A* (g) *ſemirectus, & linea DF, ſeu diſtantia obſervatoris a turre,* (h) *æqualis lineæ FA, ſeu altitudini turris ſupra obſervatoris oculum; cui ſi adjiciatur FB altitudo oculi, habebitur integra turris altitudo AB.*

[b] Per 31. l. 1. [c] Per def. 35. & cor. 1. hujus. [d] Per hanc prop. [e] Per 27. l. 1. [f] Per hypoth. [g] Per cor. 6 pr. 32. l. 1. [h] Per 6. l. 1.

Fig. 70. Cor. 4. *Hinc denique Geodætæ agri parallelogrammi aream facilius dividunt. Sit enim ABDC ager parallelogrammus; AD ejuſdem diameter, ſive linea diagonalis; cujus punctum medium ſignet* (i) *F. Quæcumque linea recta, ut EG, per punctum F tranſit, agrum in partes æquales EACG, EBDG dividit. Triangulum enim ABD per hanc prop. æquale eſt triangulo ACD; & Triangulum AEF æquale* (k) *Triangulo GFD (propter æquales* (l) *angulos alternos FAE, FDG; itemque æquales angulos ad verticem* (m) *oppoſitos AFB, DFG; & latera FA, FD, quæ inter æquales angulos exiſtunt, etiam æqualia.) Si itaque trapezio EBDF, loco trianguli AEF, triangulum eidem æquale GFD addas, areæ quantitatem non mutabis; ſed erit trapezium EBDG æquale triangulo ABD, ſive dimidio parallelogrammo, & proinde trapezio AEGC æquale. Q. E. D.*

[i] Per 10. l. 1. [k] Per 26. l. 1. [l] Per 27 l. 1. [m] Per 15. l. 1.

Scholium.

Fig. 71. PArtim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittenda, facile elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit, ex. gr. AF pedum

dum 8. AC, 4. Duc 8 in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli.

Quadrati vero area habetur ex uno latere FI per ſe ipſum multiplicato: ut ſi latus FI ſit 5. pedum; duc 5. in ſe, proveniunt 25. pedes quadrati pro area quadrati. *Fig. 72.*

Demonſtratio ex hac prop. patet, ductis per laterum diviſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

P*Arallelogramma ſuper baſi eadem* (AB) *vel æquali, & inter eaſdem parallelas* (CQ, AX) *conſtituta, ſunt æqualia.* *Fig. 73.*

Quia AL, BQ (*a*) ſunt parallelæ, eaſque ſecat CQ; erit (*b*) externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF quam LQ æquantur (*c*) eidem AB, erunt CF, LQ æquales. Adde utriſque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Inſuper & AL, BQ (*d*) æquales ſunt. Triangula igitur CLA, FQB æqualia (*e*) ſunt. Ergo ablato communi FOL, plana FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per def. 35.*
(b) *Per 29. l. 1.*
(c) *Per 34. l. 1.*
(d) *Per eand.*
(e) *Per 4. l. 1.*

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas, in infinitam longitudinem extendantur ex eadem baſi AB, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam datæ.

[Coroll. *Unde ſequitur duas urbes parallelogrammas magnitudine æquales, in circuitu tantum diſcrepare poſſe, ut unius ambitus centies vel millies alterius ambitum exuperet. Si nimirum altera ſit quadrata vel rectangula; altera vero ſuper eadem cum priore baſi, & intra eaſdem cum priore parallelas, parallelogramma quidem, ſed admodum obliquangula, & proinde in longum protenſa. Sequitur porro iſoperimetras figuras, areas immane quantum diverſas continere poſſe.*]

Scholium.

EX hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcumque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX ſeu CA ducta in baſim AB. *Fig. 73.*

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis (*f*) fit (*g*) ex AC ducta in AB. Ergo, *&c.*

(f) *Per præc.*
(g) *Per Schol. p. 34. l. 1.*

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 74. *TRiangula (ACB , AFB) ſuper baſi eadem (AB) vel æquali , & inter eaſdem parallelas (CI , AZ) conſtituta , ſunt æqualia .*

Lateribus AC , AF duc parallelas BL , BI . Parallelogramma ACLB , AFIB ſunt (*a*) æqualia . Sed horum , triangula data (*b*) ſunt dimidia . Ergo triangula data (*c*) ſunt æqualia .

[a] *Per præced.* [b] *Per 34. l. 1.* [c] *Per axio. 6.*

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis , quod eos notare juſſimus prop. præced. de parallelogrammis.

Fig. 75. Coroll. *Hinc etiam Geodætæ agri triangularis aream facillime dividunt . Sit e.g. ABC ager triangularis , & ſit baſis BC biſecta* (d) *in D ; recta DA agrum bifariam dividet . Triangula enim ABD , ACD quæ baſes habent æquales BD , CD , & communem verticem A , ac proinde inter eaſdem parallelas conſtituuntur , erunt æqualia per hanc prop.*

[d] *Per 10. l. 1.*

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig. 76. *TRiangula æqualia (ACB , AFB) ſuper eadem baſi (AB) vel æquali , ad eaſdem partes conſtituta , ſunt inter eaſdem parallelas (AB , CF .)*

Si negas , ſit CL parallela ad AB , & ducatur BL. Igitur ALB æquatur (*e*) ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipſi ACB æquale eſt . Ergo ALB & AFB æqualia ſunt , pars & totum . Quod fieri non poteſt . Igitur , &c.

[e] *Per prec.*

PROPOSITIO XLI.

Fig. 77. *SI triangulum (AFB) ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrammo (AL ,) & baſim eamdem habeat (AB) vel æqualem , ipſius dimidium erit .*

Duc CB. Triangula AFB , & ACB (*f*) æquantur . Sed (*g*) ACB eſt dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB eſt dimidium AL. Quod erat demonſtrandum .

[f] *Per 37. & 38. l. 1.* [g] *Per 34. l. 1.*

Scho-

Scholium.

EX hac & ſchollo prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcumque produci ex dimidia altitudine FI ducta in baſim (AB) vel ex dimidia baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio; ut ſi baſis AB ſit pedum 100. altitudo FI, 85. multiplica baſis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250.pedes quadrati pro area trianguli AFB. Porro altitudo ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanice innoteſcit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenitur Geometrice altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in ſcholio ibidem docebimus. Fig. 77.

In triangulo rectangulo, altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens, dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

DAto triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere, habens angulum parem dato. (O.) Fig. 78.

Baſim AB biſeca in F. Per C duc (a) CX parallelam AB. Fac (b) angulum BAL parem dato O. Duc (c) FI parallelam AL. Erit ALIF quod quæritur.

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O; & eſt æquale triangulo dato ACB, cum tam (d) triangulum ACB, quam (e) parallelogrammum AI, dupla ſint ejuſdem trianguli ABF.

[a] Per 31. l. 1.
[b] Per 23. l. 1.
[c] Per 31. l. 1.
[d] Per 38. l. 1.
[e] Per prac.

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri AB, & biſecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum ſub FB & QB par triangulo ACB. Fig. 78.

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL,) complementa (BO, OL) eorum quæ circa diametrum exiſtunt (RF & CS) ſunt æqualia. Fig. 79.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ; ſecatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum ſunt RF, CS, duo reliqua BO, OL, ſunt horum complementa.

Ea eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangula ABQ, ALQ (a) æquantur: ſimiliter ARO, OCQ (b) æquantur AFO, OSQ. Ergo ſi ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ, æqualia remanent BO & OL. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 34. l. 1.
(b) Per eamd.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 80. AD *datam rectam (OS) parallelogrammum conſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

Fac (c) parallelogrammum RC dato V æquale, habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc SQ (d) parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc AL parallelam ad OS, cui occurrant CO & QS productæ in F & L. Parallelogrammum OL eſt quod petitur.

(c) Per 42. l. 1.
(d) Per 31. l. 1.

Nam OL (e) æquatur RC, hoc eſt per conſtructionem dato triangulo V; & eſt ad datam OS; habetque angulum (f) FOS parem angulo ROC, hoc eſt per conſt. parem dato X.

(e) Per præced.
(f) Per 15. l. 1.

[Coroll. *Hinc liquet, quomodo ad datam rectam OS, parallelogrammo BO æquale & æquiangulum parallelogrammum OL conſtituere oporteat.*]

Fig. 81. Scholium. *Continet hæc propoſitio cum corollario annexo, Geometricam quamdam diviſionem. Sicut enim numerus multiplicatione productus, tamquam rectangulum quoddam jure conſiderari poteſt, cujus factores ſint duo quævis rectanguli latera contigua, prout in Scholio poſt prop. 34. declaratum eſt; Sic etiam eodem jure, numeri dividendi locum, rectangulum occupare cenſebitur, cujus latera circa angulum quemvis, diviſorem & quotum repræſentabunt. Et ſicut unus idemque numerus dividendus varios admittit diviſores, quibus ſingulis ſuus exoritur numerus quotus; ſic una eademque area rectangula quantitate data, recta cuivis tamquam lateri applicari poteſt, cui ad rectos angulos aptabitur quadam alia recta, pro altero rectanguli latere. In fig. 81. ſit rectangulum AB, duodecim pedes quadratos complexum, cujus*

Digitized by Google

jus latera ſint AC trium, & AB quatuor pedum, & proponatur idem quantitate rectangulum lateri bipedali tamquam diviſori ita applicare, ut inde exſurgat latus aliud, quod quotientis inſtar ſit habendum. In recta AE producta, capiatur linea bipedalis EH, ad quam, per corll. praeced. conſtituatur rectangulum EG ipſi AB aequale, & prodibit alterum rectanguli latus EI ſex pedes longum, pro quoto quaeſito. Cum vero, (propter parallelogramma BH, AI) rectae BD, AF, rectis EH, EI reſpective ſint (a) *aequales, pro praxi ſatis erit, ſi in CB producta accipiatur* BD *pedum duorum, & per puncta* D, E *ducatur recta DE, quae producta occurrat* (b) *rectae CA productae in F. Recta enim AF ea erit quam quaerimus. Hac quidem diviſionis ſpecies* Applicatio *dicitur; quoniam ſpatium rectangulum AB (hoc eſt, ei aequale EG) linea BD ſive EH* applicatur. *Et inde fit quod Diviſio haud raro* Applicatio *nominatur: ſcilicet pro antiquorum* Geometrarum *conſuetudine; qui* conſtructionis Geometricae, *quae regula & circino ſolis nititur, quam* computi Arithmetici *per numeros ſolos perſiciendi potiorem rationem ſemper habuerunt.* (a) Per 34. l. 1. (b) Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1.

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo (CBA,) aequale parallelogrammum conſtruere ad datam rectam (IQ) & in dato angulo (H.) Fig. 81.

Rectilineum reſolve in triangula A, B, C, ducendo rectas FL, FI.

Ad datam IQ in angulo dato H, fac (c) parallelogrammum IV aequale triangulo A. Tum producatur IR infinite verſus P, & ad rectam RV, in angulo VRP fac (d) parallelogrammum RZ aequale trigono B. Rurſum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG aequale trigono C. IG eſt parallelogrammum quaeſitum. (c) Per 44. l. 1. (d) Per eamd.

Nam (e) angulus ZVR par eſt ſibi alterno IRV. Sed (f) QVR & IRV ſunt aequales duobus rectis. Ergo etiam QVR & ZVR duobus rectis aequantur. Ergo (g) QV & ZV ſunt in directum. Pari modo oſtendam QZ & GZ eſſe in directum. Ergo tota QVZG eſt una recta, & quidem parallela ad IX, cum per conſt. QV ſit ad IP parallela. Eſt vero etiam (h) XG parallela ad IQ, cum XG ſit parallela ad SZ, & SZ ipſi RV, & RV ipſi IQ. Ergo (i) IG eſt parallelogrammum: eſſe autem quale petitur, patet ex conſtructione. (e) Per 29. l. 1. (f) Per. eamd. (g) Per 14. l. 1. (h) Per 30. l. 1. (i) Per. def. 35.

[Scholium. *Porro, ex hac ipſa propoſitione haud obſcurum eſt, quomodo parallelogrammum in angulo dato conſtruere oportet duorum pluriumve rectilineorum ſummæ æquale.*

Corollarium. *Hinc facile invenitur exceſſus quo rectilineum aliquod majus ſuperat rectilineum minus: Nimirum ſi ad eamdem rectam IQ in eodem angulo QIP applicentur ad eamdem partem parallelogramma duo, rectilineis datis reſpective æqualia. Parallelogrammum enim quo majus excedit minus, dabit rectilineorum differentiam. Q. E. I.*]

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14. lib. 2.

Fig. 13. Dato quadrangulo BF, rectangulum æquale deſcribere.

Reſolve in triangula per rectam AC. Ex oppoſitis angulis demitte perpendiculares BO, FI. Biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum ſub LS & SA æquatur dato BF. Demonſtratio patet ex prop. 41. ejuſque Scholio; [& *in Coroll. poſt prop. 2. l. 2. latius deducetur.*]

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 14. A *Data recta (AB) quadratum deſcribere.*

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

[a] *Per conſtr.* [b] *Per 29. l. 1.* [c] *Per conſtr.* [d] *Per 33. l. 1.* [e] *Per 34. l. 1.* *Fig. 73.*

Cum enim anguli A & B duo ſint (*a*) recti, erunt (*b*) AC, BE parallelæ: ſunt vero etiam (*c*) æquales. Ergo (*d*) CE, AB ſunt parallelæ & æquales. Ergo figura eſt parallelogramma, & æquilatera; anguli quoque omnes ſunt recti: (cum enim A & B ſint recti, etiam recti erunt (*e*) oppoſiti, E & C.) Ergo figura AE, eſt quadratum.

[Scholium. *Eodem fere modo facile deſcribes rectangulum ACQX quod ſub datis duabus rectis BF, AX contineatur; ſi nempe ad puncta A, X ſuper data recta AX erigantur perpendiculares AC, XQ datæ BF æquales, & ducatur CQ.*]

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (ABC) rectangulo, quadratum lateris (AC) quod recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum (AB, CB) quadratis. Fig. 85.

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt vero in triangulis IAC, FAB, etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter ſe (*a*) æqualia, nempe, IA, CA, ipſis BA, FA, alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB (*b*) æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE conſiſtunt in iiſdem baſibus IA, FA, & in iiſdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB ſunt (*c*) eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis AX, BR oſtendam parallelogramma, EC, BX æqualia eſſe. Totum igitur AR utriſque IB & BX æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

[a] *Per def.* 11. *quadrati.* [b] *Per* 4. *l.* 1. [c] *Per* 41. *l.* 1.

Aſſumptum fuit LBC eſſe parallelam IA, adeoque LB, BC eſſe unam rectam. Id vero patet ex 14. cum anguli LBA & CBA ambo recti ſint per hypotheſim.

[Cor. 1. *Si triangulum rectangulum ABC habeat latera circa angulum rectum B æqualia; erit quadratum lateris AC angulo recto oppoſiti, duplum quadrati lateris AB vel BC angulo recto adjacentis. Æquale eſt enim quadratum lateris AC quadratis* (d) *æqualibus ABq, BCq ſimul* (e) *ſumptis, ac proinde erit unius duplum.* Fig. 86.

[d] *Per axio.* 15. [e] *Per hanc prop.*

Cor. 2. *Si a trianguli cujuſcumque ABC angulo A demittatur in baſim (ſi opus productam) perpendicularis AD; erit differentia quadratorum lateris unius AB & ſegmenti contermini BD, æqualis differentiæ quadratorum lateris alterius AC & ſegmenti illi lateri contermini DC. Nam propter angulos ad* D (f) *rectos, erit in triangulo ABD, ABq* $=$ (g) *ADq* $+$ *BDq, & ſublato utrimque BDq, erit ABq* $-$ *BDq* $=$ (h) *ADq: & eodem modo in triangulo ADC oſtendi poteſt, quod ACq* $-$ *DCq* $=$ *ADq. Ergo per axio.* 1. *erit ABq* $-$ *BDq* $=$ *ACq* $-$ *DCq. Q. E. D.* Fig. 87.

[f] *Per def.* 14. [g] *Per hanc prop.* (h) *Per axio.* 3.

Cor. 3. *In triangulo ABC, demiſſa eadem perpendiculari AD, id erit baſeos BC ſegmentum majus, quod lateri majori AC adjacet, atque illud minus, quod minori AB. Nam propter latus AC majus* (i) *quam AB, erit ACq majus* (k) *quam ABq.* Fig. 87.

(i) *Ex hyp.* (k) *Per axio.* 16.

Sed

(a) Per hanc prop. *Sed ACq* (a) = *ADq* + *DCq*, & *ABq* = *ADq* + *DBq*. *Ergo ſumma quadratorum ADq, DCq major eſt quam ſumma quadratorum ADq, DBq. Quare ablato communi ADq,*
(b) Per axio. 5. (b) *erit DCq majus quam DBq, atque adeo ſegmentum DC ſegmento BD majus* (c) *erit.*

(c) Per axio. 16. Fig. 48. Cor. 4. *Si in triangulo ABE, quadratum lateris BE majus fuerit quadratis laterum AB, AE ſimul ſumptis, angulus BAE lateri BE oppoſitus erit recto major. Erigatur*(d)*enim,*
(d) Per 11. l. 1. *ſuper recta AB, ad punctum A, perpendicularis AF æqualis lateri AE, & ducatur BF. Ob angulum BAF rectum, erit*
(e) Per hanc prop. (e) *quadratum lateris BF æquale quadratis laterum BA, FA ſimul ſumptis, hoc eſt, propter æquales FA, AE, quadratum*
(f) Per axio. 15. *BF* (f) *æquabitur quadratis BA, AE ſimul ſumptis. Sed ex hypotheſi, quadratum BE majus eſt quadratis BA, AE ſimul ſumptis: Ergo quadratum BE majus eſt quadrato BF, &*
(g) Per axio. 16. *recta BE* (g) *eſt recta BF major; & proinde angulus BAE*
(h) Per 25. l. 1. (h) *eſt angulo recto BAF major. Q. E. D.*

Cor. 5. *Eodem modo, ſi in triangulo ABC, quadratum lateris BC angulo BAC oppoſiti ſit minus quadratis laterum BA, AC ſimul ſumptis, demonſtrabitur angulum BAC eſſe angulo recto minorem. Erecta enim ad latus AB perpendiculari AF ipſi AC æquali, & ducta BF, erit BFq* = (i)
(i) Per hanc prop. *ABq* + *AFq. Sed AFq* = (k) *ACq. Ergo BFq* = *ABq* +
(k) Per conſtr. & axio. 15. *ACq. Sed per hypotheſim, BCq minus eſt quam ABq* + *ACq. Ergo BCq minus eſt quam BFq, & proinde BC minor* (l)
(l) Per axio. 16. *quam BF; unde etiam angulus BAC angulo recto BAF minor* (m) *erit.*
(m) Per 25. l. 1.

Scholium.

HOC theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras ſimiles extendit) Pythagoricum appellatur paſſim ab inventore Pythagora; qui, ut teſtantur Proclus, Vitruvius, aliique, Muſis victimas immolavit, quod ſe in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum, verum & unicum omnis ſapientiæ auctorem Deum; aut certe ſi cognovit, non ſicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam uſus eſt; ac viam in primis ad incommenſurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ Philoſophiæ, cognoſcendas aperit.

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, theorema celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim & Platonem, adeo ut qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porro hujus

Digitized by Google

hujus myſterii dixiſſe videtur originem ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde (*a*) duplum unius. Quare cum quadratum diametri CB ſit 2. & quadratum lateris AB ſit unitas, erit diameter CB radix quadratica numeri binarii, & latus AB radix quadratica unitatis, ſive ipſa unitas, quarum proportio (ut ſuo loco demonſtrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt. [*Hac propoſitio de immenſurabilitate lateris & diametri in Quadrato, eſt ultima libri decimi apud Euclidem: demonſtratur autem à Tacquet in Elementis ſuis Arithmet. in Scholio poſt prop. 11. lib. 2.*] *Fig. 14.* (a) *Per cor. 1. hujus Prop.*

Atque hoc vel unico argumento, tametſi cetera omnia deficerent, evidentiſſimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe: alias enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubjungo tria problemata ex eadem propoſitione deducta, quorum uſus frequentior.

Problema 1.

Datis quotcumque quadratis, unum omnibus æquale conſtruere. *Fig. 11.*

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, & junge AC. Erit AC quadratum æquale (*b*) quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X; & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale (*c*) quadratis ex EB (ſeu EC) & ex BX; hoc eſt, æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE. (b) *Per 47. l. 1.* (c) *Per eamd.*

Problema 2.

Datis duabus rectis inæqualibus (AB, BC,) exhibere quadratum, quo quadratum majoris (AB) excedit quadratum minoris (BC.) *Fig. 19.*

Centro B, intervallo BA deſcribe circulum, [*& in diametro AF, a centro B verſus F, pone BC.*] Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriæ in E. Quadratum ex CE eſt exceſſus quæſitus.

Ducatur enim BE. Quadratum BE, hoc eſt AB, æquatur (*d*) quadrato BC & quadrato CE. Ergo &c. (d) *Per 47. l. 1.*

Pro-

Digitized by Google

Problema 3.

Fig. 90. NOtis duobus quibuſcumque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum ſit CB, angulo recto oppoſitum. Duc 6. & 8 in ſe ipſa; orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum ſumma eſt 100. Radix quadratica 100. nempe 10. dat pedes lateris BC quæſiti. Demonſt. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere BC.

Nota ſint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC. Reſiduum 64. erit quadratum lateris AC. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris AC.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 91. *SI quadratum ab uno trianguli latere* (*AB*) *deſcriptum, ſit æquale duobus reliquarum laterum* (*AC*, *BC*) *quadratis; angulus* (*ACB*) *quem reliqua latera continent, rectus erit.*

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc FC perpendicularem ad AC, & æqualem CB, & junge AF. Quadratum AF æquale eſt (*a*) quadratis FC, CA; hoc eſt (*b*) quadratis BC, CA; hoc eſt per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales (*c*) ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuo æquilatera, anguli ad C (*d*) ſunt æquales. Ergo (*e*) recti. Quod erat demonſtrandum.

[a] *Per 47. l. 1.*
[b] *Per conſtruct.*
[c] *Per axio. 15.*
[d] *Per 8. l. 1.*
[e] *Per def. 14.*

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER SECUNDUS.

HIC liber mole parvus, at præſtantia ac utilitate theorematum plane magnus. Tyrones, ſcio quod dico, nondum capient; ſed eſſe veriſſimum ulterius provecti, uſu ipſo certiſſime intelligent.

T*Ractat autem hic Liber* ſecundus *de Rectarum linearum* potentiis; *hoc eſt* quadratis. *Comparatque Rectangula varia, e rectarum aut bifariam aut utcumque diviſarum partibus oriunda cum totarum linearum rectangulis & quadratis. Pars hæc ſane elementorum longe utiliſſima eſt: ſpeciatim autem Operationum Algebraicarum præcipuarum vere fundamentum. Propoſitiones tres priores demonſtrandæ Multiplicationi, Quarta radicum quadraticarum extractioni inſervit. Quæ ſequuntur quinta, ſexta, ſeptima, octava Operationibus* Algebraicis; *Reliqua vero* Trigonometricis *conferunt plurimum. Prima quidem fronte Tyronibus hic liber videtur difficillimus; eo quod myſterii quiddam in ſe continere ſibi imaginentur. Attamen Demonſtrationes in eodem adhibitæ pleraque omnes facillimo huic axiomati nituntur*, Totum, *nempe*, omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis æquari. *Ne vero animum deſpondeant Tyrones, ſi prima vice perfecte nequeant comprehendere. Inter relegendum enim ſe tam clara non intellexiſſe olim mirabuntur.*

DEFINITIO.

PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum ſimpliciter ſine ullo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. *Fig. 71.1.2.*

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam

AC.

AC, producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. l. 2. Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum ſub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis cauſa, rectangulum ACB, deſignatur rectangulum quod continetur ſub AC & CB [*vel ſub rectis, quæ ipſis AC, CB reſpective ſunt æquales*] ad rectum angulum conſtitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum ſub AB, CB, vel rectangulum ABC, deſignatur rectangulum contentum ſub rectis AB & BC [*vel ſub rectis quæ ipſis æquales ſunt*] rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

NOTA. *Signum æqualitatis in hoc libro eſt*, ≈. [nempe in demonſtr. Tacquetianis. Alia ſigna, hic & alibi in additis adhibita, explicantur in initio, ante Tacqueti præf. ad lectorem.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 2. *SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera ſecta ſit in quotcumque partes (AE, EF, FC) erit rectangulum ſub illis duabus (AB, AC) comprehenſum, æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (AB) & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continentur.*

Statue AB perpendicularem ad AC. Per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. (*a*) Erit BC rectangulum ſub AB, & AC: & eſt æquale rectangulis BE, IF, LC; hoc eſt (quia tam IE, quam LF ſunt (*b*) æquales AB,) rectangulis (*c*) ſub AB, AE, ſub AB, EF, ſub AB, FC.

[Coroll. *Hinc ampliori demonſtratione firmari poteſt problematis quod in Scholio poſt prop. 45. lib. 1. legitur, ſolutio ibidem tradita. Si nempe quadrilaterum BF per rectam AC in triangula ABC, AFC reſolvatur; biſecta AC in S, ex oppoſitis angulis B, F, in baſim communem AC ductis perpendicularibus BO, FI, ex S erigatur SL earum ſummæ æqualis: oſtendendum eſt rectangulum ſub CS & SL æquari quadrilatero BF. Cum enim triangulo ABC, AFC* (d) *æquantur rectan-*

(a) Per def. l. 2.
(b) Per 29. & 34. l. 1.
(c) Per def. l. 2.
Fig. 83. l. 1.
(d) Per 41. l. 1.

ctangulis ſub CS & BO, & ſub CS & FI reſpective; cumque recta LS æquatur ipſis BO & FI ſimul ſumptis, & dividatur in partes, SD, DL, ipſis BO, FI reſpective æquales; Ergo triangula iſta, ſeu quadrilaterum BF, rectangulis CD, LE, ſub inſecta CS, & ſingulis ſectæ LS partibus, hoc eſt, vi hujus prop. rectangulo LC ſub duabus CS & LS æquari neceſſe eſt.]

Scholium.

DEcem primâ hujus libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per ſeipſum.

[*Sit numerus inſectus 9, & ſectus 12, qui in partes tres nimirum 3, 4 & 5 dividatur. Erit rectangulum ex 9 in 12 ducto* = 108 *æquale rectangulis tribus 27 & 36 & 45, ex 9 in 3 & 9 in 4 & 9 in 5 reſpective ducto compoſitis.*

Vel ſit numerus 432 tamquam multiplicandus *ſectus in 400 & 30 & 2, atque numerus 8 tamquam* multiplicans *inſectus; erit* 8 × 432 = 3456 *æqualis* 8 × 400 = 3200, + 8 × 30 = 240, + 8 × 2 = 16. *Unde etiam Multiplicationis demonſtratio peti debet.*]

PROPOSITIO II.

SI *recta (AB) ſecta ſit utcumque (in C,) duo rectangula ſub tota (AB) & partibus (AC, CB) comprehenſa, quadrato totius æqualia ſunt.* Fig. 2.

Accipiatur F æqualis AB.

Rect. FAB Æ. (a) rect. FAC)
rect. FCB) (a) *Per 1. l. 2.*

hoc eſt, quia F & AB ſunt æquales inter ſe;

Quad. ex AB Æ. rect. BAC)
rect. ABC.)

[Aliter. *Fiat* (b) *ARDB quadratum rectæ AB, & ad punctum C erigatur* (c) *recta CH ipſi AB perpendicularis. Anguli itaque ad C recti, angulis A & B æquales ſunt, & rectæ AR, CH, BD ſibi invicem ſunt* (d) *parallelæ, & AH, BH* (e) *parallelogramma rectangula. Erit præterea CH rectæ* (f) *AR ſive* (g) *AB æqualis: & proinde AH, BH ſunt* (h) *rectangula ſub tota AB & partibus AC, CB comprehenſa; & ſimul ſumpta æquantur quadrato ipſius AB.*

Fig. 3. (b) *Per 46. l. 1.* (c) *Per 11. l. 1.* (d) *Per 28. l. 1.* (e) *Per def. 35. & cor. 1. p. 34. l. 1.* (f) *Per 34. l. 1.*

Sit

(g) *Per conſtruct.* (h) *Per def. 1. l. 2.*

Sit numerus 8 *in* 5 *&* 3 *ſectus: quadratum totius* 8 × 8 = 64 *æquale eſt rectangulis* 8 × 3 = 24 *&* 8 × 5 = 40.]

PROPOSITIO III.

Fig. 4.

SIt recta (AB) utcumque ſecta (in C:) Erit rectangulum ſub tota (AB) & partium alterutra (BC) comprehenſum, æquale rectangulo ſub partibus (AC, CB) una cum quadrato prædictæ partis (BC.)

Aſſume F æqualem CB.

(a) Per 1. l. 2.

Rect. ABF Æ. (*a*) rect. ACF)
rect. CBF:)

hoc eſt, quia æquales ſunt CB & F;

Rect. ABC Æ. rect. ACB)
quad. CB.)

Fig. 5.
(b) Per Schol. poſt 46. l. 1.
(c) Per 11. l. 1.
(d) Per 29. & 34. l. 1.
(e) Per conſtr.

[Aliter. *Fiat* (b) *rectangulum* AD *ſub tota* AB *& parte* CB, *&* (c) *erigatur perpendicularis* CE: *ob rectam* CE, *recta* (d) BD *ſive* (e) BC *æqualem, rectangulum* AD *ſub tota* AB *& parte* BC *comprehenſum, æquabitur rectangulo* AE *ſub partibus* AC, CB, *una cum quadrato* EB *prædictæ partis* BC.

Sit numerus 7 *in partes* 3 *&* 4 *ſectus. Rectangulum* 7 × 3 = 21 *æquale eſt rectangulo* 3 × 4 = 12 *& quadrato* 3 × 3 = 9. *Pariter Rectangulum* 7 × 4 = 28 *æquale eſt rectangulo* 3 × 4 = 12 *& quadrato* 4 × 4 = 16.]

PROPOSITIO IV.

Fig. 6.

SIT recta (FL) utcumque ſecta (in O:) erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL,) & bis rectangulo ſub partibus (FO, OL) contento.

(f) Per 2. l. 2.

Quad. FL Æ. (*f*) rect. FLO cum
rect. LFO.

(g) Per 3. l. 2.

Atqui rect. FLO Æ. (*g*) rect. FOL)
quad. OL,)

(h) Per eamd.

& rect. LFO Æ. (*h*) rect. LOF)
quad. FO.)

Ergo quad. FL Æ. rect. FOL)
quad. OL)
rect. LOF)
quad. FO:

Id

Id eſt, quad. FL Æ. rect. FOL bis
quad. OL
quad. FO.

[Aliter. *Fiat* FGDL *quadratum rectæ* FL, *& ducta diametro* GL, *in triangulo* FGL, *ob æqualia latera* FG, FL *& angulum* F *rectum, erunt anguli* FGL, FLG *ſemirecti* (a) *& æquales. Per punctum* O *ducatur ipſi* FG *vel* LD *parallela* OK, *quæ ſecet diametrum* GL *in* C; *& per punctum* C *ipſi* FL *vel* GD *parallela agatur* HI. *Propter omnes angulos quadrati* FD *rectos, erunt etiam omnia parallelogramma* FC, OI, HK, CD *rectangula* (b); *& ob parallelas* OK, FG, *erit* (c) *externus ang.* LCO *æqualis interno & opp.* FGL, *hoc eſt,* FLG *ſemirecto. Ergo in triangulo* LOC, *latera* OC, OL *ſunt* (d) *æqualia: Æquantur* (e) *etiam rectanguli* OI *oppoſita latera* OL, CI; OC, LI; *& proinde* OI *eſt* (f) *quadratum rectæ* OL: *Et eodem modo demonſtrabitur* HK *quadratum eſſe rectæ* HC, *vel* (g) FO. *Et cum* CO, OL *æquentur, erit* FC *rectangulum ſub partibus* FO, OL *datæ rectæ* FL. *Sed rectangula* FD, CD *ſunt* (h) *æqualia, & proinde* FC, CD *ſimul ſumpta, æquantur bis rectangulo ſub partibus* FO, OL. *Quare* FD *quadratum totius rectæ* FL, *æquatur ipſis* HK, OI, *partium* FO, OL *quadratis, una cum* FC, CD *bis rectangulo ſub partibus.* Q.E.D.

Fig. 7.
(a) Per cor. 12. pr. 32. l. 1.
(b) Per cor. 1. pr. 34. l. 1.
(c) Per 27. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 34. l. 1.
(f) Per def. 32. l. 1.
(g) Per 34. l. 1. & axio. 15.
(h) Per 43. l. 1.

Sit numerus 10 *in partes* 7 & 3 *ſectus. Quadratum* 10 × 10 = 100 *æquale eſt quadratis partium* 7 × 7 = 49 & 3 × 3 = 9, *& duobus rectangulis* 7 × 3 = 21 & 7 × 3 = 21. *Vel ſit numerus* 12 *in partes* 10 & 2 *diviſus. Quadratum totius* 12 × 12 = 144 *æquale eſt quadratis partium* 10 × 10 = 100 & 2 × 2 = 4, *una cum bis rectangulo* 10 × 2, *ſive* 2 × 10 × 2 = 40. *Et hinc pendet radicis quadraticæ extractio.*

Corollarium 1. *Hinc liquet parallelogramma* OI, HK *circa diametrum quadrati, eſſe quadrata.* Fig. 7.

2. *Item diametrum cujuſvis quadrati ejus angulos biſecare. Eſt enim* FLD *ang. rectus, &* FLG *ſemirectus.*

3. *Quadratum lineæ dimidiæ eſt quadrati lineæ integræ pars quarta. Promotis enim rectis* OK, HI, *motu parallelo, uſque ad media puncta* A & B, M & N *laterum quadrati* FD; *rectangula* FC, CD, *& quadrata* OI, HK *in quatuor æqualia quadrata deſinent. Et eodem modo conſtabit rectangulum (ſive etiam parallelogrammum quodlibet) ſub duabus rectis quibuſvis, rectanguli (ſeu parallelogrammi parallelogrammo dato æquianguli) ſub earum dimidiis eſſe quadruplum.*

4. *Quadratum quodvis* FD *æquale eſt bis rectangulo ſub quadrati latere* FL *ſeu* GD, *& lateris dimidio* LN *ſeu* ND. *Æquatur enim rectangulis* FN, MD *ſimul ſumptis. Item, parallelogrammum quodvis, æquale eſt bis parallelogrammo æquiangulo ſub uno quovis latere & alterius dimidio.*]

PROPOSITIO V.

Fig. 1. *SI recta* (*QX*) *ſecta fuerit æqualiter* (*in R*) *& inæqualiter* (*in S*,) *erit rectangulum ſub inæqualibus partibus* (*QS*, *SX*) *contentum, una cum quadrato partis intermediæ* (*RS*) *æquale quadrato dimidiæ* (*QR*.)

(a) Per 1. l. 2. Rect. QSX (*a*) Æ. rect. QR. SX
rect. RSX.

Rect. QR, SX Æ. rect. RXS;
id eſt,

(b) Per 3. l. 2. Æ. (*b*) rect. RSX
quad. SX.

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX
quad. SX
rect. RSX.

Addatur utriſque quad. RS: habebitur,

(c) Per 4. l. 2. rect. QSX Æ. rect. RSX
quad. RS quad. SX
rect. RSX
quad. RS; id eſt, (*c*) quad. RX ſeu QR.

Fig. 9. [Aliter. *Super recta QX parte dimidia RX fiat quadratum RF, & ducta diametro XE, per S ducatur SG ipſi RE vel XF parallela, quæ ſecet diametrum in H; & per H, ipſi QX vel EF parallela agatur KI, ſecans RE in L, & per Q ipſi RL parallela agatur QK. Propter* (d) *quadratum SI, circa diametrum quadrati RF, erit SX* (e) = *SH; & ob parallelogrammum SL, erit etiam RS* (f) = *LH, & RL = SH = SX. Eſt autem QR* (g) = *RX* (h) = *XF. Unde QL* (i) = *SF. Commune adjiciatur RG, & QX + LG = RF. Sed QH eſt rectangulum ſub recta QH partibus inæqualibus QS, SX; & LG eſt* (k) *quadratum partis intermediæ RS; & RF eſt* (l) *quadratum dimidiæ RX. Ergo, ſi recta QX, fuerit ſecta æqualiter in R, & inæqualiter in S, erit, &c. Q. E. D.*

(d) Per cor. 1. praeced. (e) Per def. 32. l. 1. (f) Per 34. l. 1. (g) Per hypoth. (h) Per def. 32. l. 1. (i) Per def. l. 2. (k) Per cor. 1. prac. & prop. 34. l. 1. (l) Per conſtr.

Atque hinc & ex prop. ſequenti, pendet æquationum quadraticarum adfectarum conſtructio Geometrica, uti ad prop. 28. & 29. lib. 6. plenius explicabitur.

Sit numerus 8 ſectus æqualiter in 4 & 4, atque inæqualiter in 5 & 3. Erit rectangulum 5 × 3 = 15 *una cum quadrato* 1 × 1 = 1 *æquale quadrato* 4 × 4 = 16.

Cor. 1. *Hinc rectangulum QSX, partium inæqualium, minus eſt quadrato QR* (*ſive dimidiæ QX.*) *Nam per hanc prop.*

prop. Rectangulum QSX, una cum quadrato RS, æquatur quadrato QR.

Cor. 2. *Quo propius accedit punctum S ad medium punctum R, eo majus erit rectangulum QSX, & quo longius a medio puncto recedit, eo minus erit idem rectangulum. Punctum enim S accedendo minuit, & recedendo auget partem intermediam RS; unde* (a) *etiam RS quad. minuetur & augebitur reſpective. Et cum per hanc prop. ſit RS quad. + QSX rect. = QP. quad. Ergo, quo minus fuerit RS quad. eo majus erit rectang. QSX & vice verſa.* (a) Per axio. 6.

Cor. 3. *Quo propius accedit punctum S ad medium punctum R, eo minor erit ſumma quadratorum partium inæqualium QS, SX; & quo longius S a medio puncto recedit, eo major erit illa ſumma. Nam QXq =* (b) *QSq + SXq + 2 QSX. Sed punctum S propius accedendo ad R, rectangulum QSX auget* (c), *& recedendo minuit. Ergo idem punctum S ad medium R propius accedendo minuit QSq + SXq & recedendo auget.* (b) Per 4. l. 2. (c) Per cor. præced.

Cor. 4. *In fig. 7. rectangulum FOL partium inæqualium rectæ FL quater ſumptum, quadrato ipſius FL minus eſt. Nam quadratum dimidiæ FL quater ſumptum* (d) *æquatur quadrato FL: Sed rectang. FOL* (e) *minus eſt quadrato dimidiæ FL; & proinde rectang. FOL quater ſumptum, minus eſt quadrato dimidiæ FL quater ſumpto, ſive minus eſt quadrato ipſius FL. Q. E. D.* Fig. 7. (d) Per cor. 3. pr. 4 l. 2. (e) Per cor. 1. hujus.

Cor. 5. *Si duæ rectæ æquales AB, CD, ita dividantur in E, F, ut rectangulum AEB ſub partibus unius, æquale ſit rectangulo CFD ſub partibus alterius; erunt unius partes partibus alterius reſpective æquales, major majori, & minor minori, ſi partes fuerint inæquales. Si enim puncta E, F, biſecant rectas æquales AB, CD, liquet AE eſſe = CF, & EB = FD; ſin aliter, biſecentur AB, CD in M & N; atque earum ſemiſſes MB, ND æquales* (f) *erunt, & proinde MBq* (g) *= NDq. Sed per hanc prop. MBq = AEB rect. + MEq, & NDq = CFD rect. + NFq. Ergo* (h) *AEB rect. + MEq = CFD rect. + NFq. Et ablatis rectangulis ex hypotheſi æqualibus,* (i) *erit MEq = NFq, & ME = NF; quæ ſi æqualibus AM, CN addantur, & ab æqualibus MB, ND ſubtrahantur,* (k) *habebitur AE = CF, & EB = FD. Q. E. D.* Fig. 10. (f) Per axio. 6. (g) Per axio. 15. (h) Per axio. .. (i) Per axio 3. (k) Per axio 2. & 3.

Cor. 6. *Rectangulum ſub ſumma & differentia duarum rectarum (QR, RS,) æquatur differentiæ quadratorum ab illis rectis factorum. Nam per hanc prop. rect. QSX + quad. RS = quad. QR. Aufer utrimque quad. RS, & erit rect. QSX = quad. QR. — quad. RS. Cum igitur QS ſit rectarum QR, RS ſumma, & (propter QR = RX) SX ſit earum differentia, liquet propoſitum.* Fig. 8. 9.

PROPOSITIO VI.

Fig. 11. *SI recta (AB) ſit bifariam ſecta (in C) eique recta quædam adjiciatur (BF ;) erit rectangulum ſub tota compoſita (AF) & adjecta (BF) contentum, una cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſitæ ex dimidia & adjecta.*

Adde in directum LA, æqualem adjectæ BF. Cum æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B

(a) Per præced. Ergo (rect. LBF cum quad. CB Æ. (a) quad. CF.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF,

rect. LBF Æ. rect. AFB.

Ergo (rect. AFB quad. CB. Æ. quad. CF.

Fig. 12. [Aliter. *Conſtructa enim figura* 12. *ſuper data recta ACBF, eodem prorſus modo quo in prop. præced. ſuper recta QRSX figuram* 9. *conſtruximus, erit AN rectangulum ſub tota compoſita AF & adjecta BF; & KG quadratum ipſius CB, ſive dimidiæ AB; CE vero quadratum ipſius CF, nempe compoſitæ ex dimidia & adjecta. Et ob rectangulum HE rectangulo AK æquale, (nam AK*(b)$=$*KB*(c)$=$*HE) & reliquum ſpatium utrinque commune, liquet propoſitum.*

(b) Per 36 l. 1.

(c) Per 43 l. 1.

Sit numerus 6 *ſectus æqualiter in* 3 & 3 : *eique addatur numerus* 2. *Erunt rectangulum* $8 \times 2 = 16$ & *quadratum* $3 \times 3 = 9$ *æqualia quadrato* $5 \times 5 = 25$.

Fig. 11. Cor. 1. *Hinc ſi tres rectæ, AF, CF, BF fuerint arithmetice proportionales, (hoc eſt, ſi differentia AC inter primam & ſecundam, differentiæ CB inter ſecundam & tertiam fuerit æqualis;) erit rectangulum ſub extremis AF, BF, una cum quadrato differentiæ AC vel CB, æquale quadrato mediæ CF.*

Fig. 12. Cor. 2. *Hinc rectangulum AN, minus eſt quadrato CE, defectu quadrati KG, quod data recta AB, ſemper idem manet, utcumque augeatur recta BF. Ex augmento vero ipſius BF, rectangulum AN ad quadratum CE magis magiſque accedit, tam proportione, quam figura; ita ut differentia iſta KG, reſpectu magnitudinis figurarum AN & CE, tandem videatur contemnenda.*]

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcumque ſecta (in C,) erunt quadrata totius (AB) & ſegmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento ſub tota (AB) & ſegmento dicto (AC,) una cum quadrato ſegmenti alterius (CB.) Fig. 13.

Quad. AB (*a*) Æ. rect. BCA bis (a) Per 4. l. 2.
quad. AC
quad. BC.

Adde utriſque quad. AC: erunt

(Quad. AB Æ. rect. BCA bis
quad. AC quad. AC bis
quad. BC.)

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, æquatur (*b*) rectangulo BAC bis. Quare ſi pro BCA bis & quad. AC bis ſubſtituamus BAC bis; erit (b) Per 3. l. 2.

(Quad. AB Æ. rect. BAC bis
quad. AC quad. BC.)

[Aliter. *Conſtructa figura* 14. *ita ut AD ſit quadratum totius AB, & AL quadratum partis AC, ductaque quadrati AD diametro EB, & producta LC in F, quæ ſecet diametrum in G, & per G ducta HI parallela ipſi AB vel ED, erunt rectæ HK; HI toti AB & ſibi invicem æquales; (nempe HK = HA + AK, & AK* (c) *= AC, AH* (d) *= CG* (e) *= CB, unde HK = AC + CB = AB* (f *= HI;) & HE, HG parti AC & ſibi invicem æquales. Unde ob duo æqualia rectangula ſub tota AB & parte AC, nempe HD, HL; & CI quadratum partis alterius, idem ſpatium cum quadratis AD, AL continentia, liquet propoſitum.* Fig. 14. (c) Per conſtr. & def. 32. l. 1. (d) Per 34. l. 1. (e) Per cor. 1. pr. 4. l. 2. & def. 32. l. 1. (f) Per 34. l. 1.

Sit numerus 13 *utcumque ſectus in* 9 & 4. *Erunt quadrata* 13 × 13 = 169 & 9 × 9 = 81 *æqualia* 13 × 9 = 117 & 13 × 9 = 117 & *quadrato* 4 × 4 = 16.

Propoſitio quarta nobis exhibet radicis binomiæ quadratum: ex hac autem ſeptima elicietur quadratum radicis reſiduæ, per ſequens

Corollarium. *Si a recta BA auferatur pars AC; quadratum reſiduæ BC, a quadratis totius BA & ablatæ AC ſimul ſumptis exceditur, bis rectangulo BAC quod ſub tota & ablata continetur. Nam per hanc prop. BAq + ACq = 2 rect. BAC + BCq; & utrinque ſubducendo* 2 *rect. BAC, erit BAq* — 2 *rect. BAC + ACq = BCq. Q. E. D.* Fig. 13.

Sic ſane, in fig. 14. CI = AD + AL — HD — HL ; *hoc eſt*, BCq = BAq + ACq — *rect.* BAC *bis.*]

PROPOSITIO VIII.

Fig. 15.

SI *recta* (LF) *fuerit ſecta bifariam* (*in* I) *eique quædam recta adjiciatur* (FO,) *erit rectangulum* (LIO) *quod ſub* (LI) *dimidia*, & (IO) *compoſita ex dimidia*, & *adjecta continetur*, *quater ſumptum*, *una cum quadrato adjectæ* (FO,) *æquale quadrato totius compoſitæ* (LO.)

(a) Per præc.

(Quad. IO (*a*) Æ. rect. OIF bis)
(quad. IF   quad. FO.)

hoc eſt, quia ex hyp. FI, LI ſunt æquales, ac proinde quad. FI eſt quad. LI, & rect. OIF eſt rect. OIL, ſeu LIO,

(quad. IO   Æ. rect. LIO bis
(quad. LI   quad. FO.

Quare ſi utriſque æqualibus addas rect. LIO bis ; Erit

(quad. IO
(quad. LI
(rect. LIO bis ;

id eſt,

(b) Per 4. l. 2.

(*b*) quad. LO Æ. rect. LIO bis)
quad. FO)
rect. LIO bis :)

Id eſt,

Æ. rect. LIO quater)
& quad. FO.)

Fig. 16.

[Aliter. *Fiat* OD *quadratum totius compoſitæ* LO, & *ducta ejus diametro* LA, *per* I, F *puncta*, *ipſi* LD *vel* OA *parallelæ agantur* IB, FE, *ſecantes diametrum in* R & S; & *per* R, S *puncta*, *ipſi* LO *vel* DA *parallelæ agantur* TN, MH. *Propter* LF *biſectam in* I, (c) *erit lineæ dimidiæ* LI *quadratum* TI, *pars quarta quadrati* MF *lineæ integræ* LF, & *quatuor rectangula* TI, RF, MR, PQ (d) *erunt quadrata ſibi mutuo æqualia. Deinde, propter* FQ, QS *æqualium quadratorum latera*, & *proinde æqualia*, (e) *æquabuntur rectangula* FN, QH: *Sed* FH (f) = DS, & QH, (g) = BS; *ergo* & FN (h) = BM, & *quatuor rectangula* FN, QH, BM, BS *erunt ſibi mutuo æqualia. Porro propter æquales* LI, IR, *erit* RO, (*hoc eſt, quadratum* RF *una cum rectangulo* FN) *rectangulum ſub dimidia* LI, & IO *compoſita ex dimidia* & *adjecta*.

(c) Per cor. 3. pr. 9. l. 1.
(d) Per cor. idem.
(e) Per 36. l. 1.
(f) Per 43. l. 1.
(g) Per eamdem.
(h) Per axio. 3.

Ergo

Ergo quatuor quadrata, TI, RF, MR, PQ, *una cum quatuor rectangulis* FN, QH, BM, BS *æquabuntur rectangulo ſub dimidia* LI, *& compoſita* IO *quater ſumpto: Eſt autem* EH *quadratum adjecta* FO. *Ergo, ſi recta* LF *fuerit ſecta bifariam in* I, *eique quædam recta* FO *adjiciatur; erit &c.* Q. E. D.

Sit numerus 12 *ſectus æqualiter in* 6 *&* 6; *eique addatur numerus* 4. *Erunt quatuor rectangula* $10 \times 6 = 240$ *& quadratum* $4 \times 4 = 16$ *æqualia quadrato* $16 \times 16 = 256$.

Euclides hanc propoſitionem hoc modo effert.

Si recta IO fuerit utcumque ſecta in F; erit rectangulum OIF quod ſub tota IO, & una parte IF continetur, quater ſumptum, una cum quadrato reliquæ partis FO, æquale quadrato quod ex tota & dicta parte OI + IF [*ſeu ſumpta in* OI *producta, recta* IL = IF, *æquale quadrato quod ex* OI *&* IL, *nempe* LO] tamquam una linea deſcribitur. Fig. 16.

Sit numerus 10 *diviſus in* 6 *&* 4; *erit factum ex* 6×10 *quater ſumptum* = 240, *&* $4 \times 4 = 16$; *Et* $240 + 16 =$

$256 = \overline{10 + 6} \times \overline{10 + 6}$.]

PROPOSITIO IX.

Si recta (AC) *ſit diviſa bifariam* (*in* B) *& non bifariam* (*in* F;) *erunt quadrata partium inæqualium* (AF, FC) *dupla quadratorum dimidiæ* (AB) *& partis intermediæ* (BF.) Fig. 17.

Quad. AF Æ. (*a*) rect. ABF bis (a) Per 4. l. 2.
quad. AB
quad. BF.

Addito igitur utriſque quad. FC,

quad. AF
quad. FC Æ. rect. ABF bis
quad. AB
quad. BF
quad. FC

Sed rect. ABF eſt rect. CBF, quia AB, BC ſunt æquales ex hyp.

Ergo quad. AF
quad. FC Æ. rect. CBF bis
quad. AB
quad. BF
quad. FC.

Atqui (*b*) CBF bis cum quad. FC æquantur quadratis BC, BF, ſeu AB, BF: quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt (b) Per 7. l. 2.

quad. AF ⎫ æ. quad. AB ⎫
quad. FC ⎭ quad. AB
quad. BF
quad. BF; ⎭
Id eſt,
quad. AB ⎫ bis.
quad. BF ⎭

Fig. 18. [Aliter. *Ad punctum B erigatur BE æqualis & perpendicularis ipſi BA vel BC: & ductis AE, EC, per F agatur ipſi BE parallela FQ, & per Q ducatur QG parallela rectæ AC, & ducatur AQ. Propter ang. ABE rectum & lineas AB, BE æquales,* (a) *erunt BAE, BEA ſemirecti; & ob eamdem rationem erunt BCE, BEC ſemirecti; Unde AEQ eſt rectus. Et propter* (b) *QFC rectum, & C ſemirectum, erit & FQC* (c) *ſemirectus, & rectæ FQ, FC erunt* (d) *æquales. Et quoniam rectas parallelas GQ, AC ſecat recta EB, erit* (e) *externus ang. EGQ æqualis interno & op. EBC, & proinde rectus; angulus vero GEQ eſt ſemirectus, ergo & GQE* (f) *ſemirectus erit, & rectæ GE, GQ erunt* (g) *æquales; & propter BQ rectangulum,* (h) *æquatur GQ ipſi BF. Unde in triangulo rectangulo ABE, propter æquales rectas AB, BE erit AE quadratum* (i) *duplum quadrati AB partis dimidiæ; & in triangulo rectangulo EGQ, propter æquales EG, GQ, erit EQ* (k) *quadratum duplum quadrati GQ vel BF partis intermediæ. Quadrata vero AE & EQ æqualia ſunt* (l) *quadrato AQ; hoc eſt, quadratis* (m) *AF & FQ ſive AF & FC partium inæqualium. Ergo quadrata partium inæqualium AF, FC, dupla ſunt quadratorum partis dimidiæ AB, & partis intermediæ BF. Q. E. D.*

(a) Per cor. 11. pr. 32. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 27. l. 1.
(f) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(g) Per 6. l. 1.
(h) Per 34. l. 1.
(i) Per cor. 1. pr. 47. l. 1.
(k) Per idem.
(l) Per 47. l. 1.
(m) Per eamd.

Sit numerus 32 diviſus æqualiter in 16 & 16; & inæqualiter in 20 & 12. Erunt quadrato $20 \times 20 = 400$ & $12 \times 12 = 144$ *dupla quadratorum* $16 \times 16 = 256$ & $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO X.

Fig. 19. **S**I *recta* (FI) *ſit biſecta* (*in* L) *eique quædam recta adjiciatur* (IO;) *erunt quadrata totius compoſitæ* (FO) & *adjectæ* (IO) *dupla quadratorum quæ deſcribuntur ſuper dimidia* (FL) & *ſuper* (LO) *compoſita ex dimidia & adjecta.*

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam FL,

FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo

$$\left(\begin{matrix}\text{quad. QI}\\ \text{quad. IO}\end{matrix}\ \text{\AE.}\ (a)\ \begin{matrix}\text{quad. QL}\\ \text{quad. LI}\end{matrix}\right)\text{bis.}$$

(a) *Per præc.*

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad. LI eſt quad. FL.

$$\text{Ergo}\left(\begin{matrix}\text{quad. FO}\\ \text{quad. IO}\end{matrix}\ \text{\AE.}\ \begin{matrix}\text{quad. FL}\\ \text{quad. LO}\end{matrix}\right)\text{bis.}$$

[Aliter. *Ad L punctum, recta FL vel LI æqualis & perpendicularis agatur LE, & ducantur FE, EI; & per E ducatur EQ parallela ipſi FO; & per O ducatur OQ parallela ipſi LE: & ob rectas parallelas EL, QO, rectæ EI, QO non parallelæ, ſi producantur,* (b) *concurrent alicubi. Producantur donec concurrant in G, & ducatur FG. Propter angulum FLE rectum, & FL, LE æquales,* (c) *erunt LFE, LEF ſemirecti; & pari ratione LIE, LEI* (d) *erunt ſemirecti, & proinde FEI rectus. Porro angulus OIG, oppoſitus ad verticem ſemirecto LIE,* (e) *eſt etiam ſemirectus: & propter parallelas EL, QG, a recta FO ſectas in L & O, & angulum ELO rectum, erit etiam ang.* (f) *alternus GOL rectus: quare in triangulo GOI, propter angulum ad O rectum & ad I ſemirectum, erit & ang. OGI* (g) *ſemirectus, & proinde latera OG, OI* (h) *erunt æqualia. Et cum in parallelogrammo LQ, angulus L rectus ſit, etiam oppoſitus Q rectus* (i) *erit. Quare in triangulo EQG, propter Q rectum, & QGE ſemirectum, erit & QEG* (k) *ſemirectus, & latera QE, QG* (l) *æqualia: ſed in rectang. LQ, eſt EQ* (m) *= LO: quare LO = EQ = QG. Jam vero, in triangulo rectangulo FLE, propter latera FL, LE æqualia, FE quadratum duplum* (n) *eſt quadrati FL partis dimidiæ; & in triangulo rectang. EQG, propter latera QE, QG æqualia, erit EG quadratum,* (o) *duplum quadrati EQ vel LO compoſitæ ex dimidia & adjecta. Quadrata vero FE & EG æqualia ſunt* (p) *quadrato FG; hoc eſt,* (q) *quadratis FO totius compoſitæ, & OG vel OI partis adjectæ. Ergo* (r) *quadrata totius compoſitæ FO, & adjectæ OI, dupla ſunt quadratorum dimidiæ FL, & LO compoſitæ ex dimidia & adjecta. Q. E. D.*

Fig. 20.
(b) *Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1.*
(c) *Per cor. 11. pr. 32. l. 1.*
(d) *Per idem.*
(e) *Per 15. l. 1.*
(f) *Per 27. l. 1.*
(g) *Per cor. 6. p. 32. l. 1.*
(h) *Per 6. l. 1.*
(i) *Per 34. l. 1.*
(k) *Per cor. 6. pr. 32. l. 1.*
(l) *Per 6. l. 1.*
(m) *Per 34. l. 1.*
(n) *Per cor. 1. pr. 47. l. 1.*
(o) *Per idem.*
(p) *Per 47. l. 1.*
(q) *Per eamd.*
(r) *Per axio. 1.*

Sit numerus 40 *ſectus æqualiter in* 20 *&* 20, *eique addatur numerus* 14. *Erunt Quadrata* 54 × 54 = 2916 *&* 14 × 14 = 196 *dupla quadratorum* 20 × 20 = 400, *&* 34 × 34 = 1156.]

PRO-

PROPOSITIO XI.

Fig. 21. ***D**Atam rectam (AB) ita ſecare (in C,) ut rectangulum (ABC) ſub tota & una parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ (AC.)*

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB; cui ex FA producta æqualem abſcinde XI. Tum abſcinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ducta per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI; erit

(a) *Per. 6. l. 2.*

(b) *Per conſtr. & axio. 15.*

(c) *Per 47. l. 1.*

(rect. FIA Æ. (*a*) quad. XI;
quad. XA
id eſt,
Æ. (*b*) quad. XB;
id eſt,
Æ. (*c*) quad. BA
quad. XA.)

Auferatur utrimque quad. XA; Erit
rect. FIA ſeu FL Æ. quad. BA; id eſt AS.
Quare ablato rurſum communi AO;
Erit AL Æ. CS.

Atqui AL eſt quadratum AC, cum AI, AC ex conſtr. ſint æquales: & CS eſt rect. ABC, cum BS ſit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

PRopoſitiones 10. primæ hujus libri veræ ſunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non poteſt. Neque enim ullus numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam, æquale ſit quadrato partis reliquæ. [*Et hoc quidem demonſtravit Tacquetus noſter in Schol. poſt prop. 29 libri tertii elementorum Arithmet. In numeris ſurdis autem exhiberi poſſunt quantitates ſegmentis AC, CB reſpondentes. Sit AB = 2. hoc eſt, proponatur numerus binarius ita dividendus in partes duas, ut quadratum partis majoris æquetur facto ſub toto binario in ſui partem minorem ducto. Erit AC, ſive pars major = $\sqrt{5}$: — 1; & CB, ſive pars minor = 3 — $\sqrt{5}$. Sic enim, non ſolum iſtarum partium ſumma toti binario æqualis erit; verum etiam, tum quadratum partis majoris, tum*

tum & factum ex binario & parte minori, æquabitur uni eidemque quantitati, nempe 6 — 2 √ 5.] Porro mira vis eſt hujus ſectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

IN *trigono obtuſangulo (ACB,) quadratum lateris (AB) obtuſo angulo (C) oppoſiti, quadrata laterum reliquorum (AC, BC) excedit rectangulo (BCF) bis, quod comprehenditur ſub (BC) latere alterutro obtuſum angulum (ACB) continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis (AF;) & ſub (FC) intercepto exterius latere inter perpendicularem & obtuſum angulum.* Fig. 22.

Quad. AB Æ. (*a*) quad. AF, quad. BF (a) Per 47. *l.* 1.

Sed quad. BF eſt (*b*) æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo ſi hæc ſubſtituas pro quad. BF; erit (b) Per 4. *l.* 2.

Quad. AB Æ. quad. AF, quad. FC, quad. CB, rect. BCF bis.

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato (*c*) AC. Quare hoc pro illis ſubſtituto, erit (c) Per 47. *l.* 1.

Quad. AB Æ. quad. AC, quad. CB, rect. BCF bis.

PROPOSITIO XIII.

IN *triangulo quocumque (ACB,) quadratum lateris (AB) acuto angulo (C) oppoſiti, a quadratis laterum reliquorum (AC, BC) exceditur rectangulo (BCF) bis, quod continetur ſub (BC) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab angulo oppoſito (A;) & ſub (CF) intercepta inter perpendicularem (AF) & acutum angulum (C.)* Fig. 23. 24.

Quad.

(a) Per 4. l. 2. Quad. BC. Æ. (*a*) rect. BFC bis
quad. BF
quad. FC.

(b) Per 47. l. 1. Et Quad. AC (*b*) Æ. quad. FC
quad. AF.

Quare duo (quad. BC Æ. rect. BFC bis
ſimul (quad. AC quad. BF
quad. FC bis
quad. AF

(c) Per 3. l. 2. Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur (*c*) rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis ſubſtituto,

(Quad. BC Æ. rect. BCF bis
(quad. AC quad. BF
quad. AF.

(d) Per 47. l. 1. Atqui quadrata AF, BF ſunt (*d*) quad. AB. Ergo hoc pro illis ſubſtituto,

(Quad. BC Æ. rect. BCF bis
(quad. AC quad. AB:

Hoc eſt, BC, AC quadrata excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 25. (e) Per cor. 3. p. 32. l. 1. VEra eſt propoſitio licet perpendicularis [*AF*, *propter angulum ABC* (*e*) *obtuſum*,] cadat extra triangulum. [*In latus CB productum.*] Demonſtratio fere eadem eſt. [*Vel ſic:*

(f) Per. 12. l. 2. *Quad. AC* Æ. (f) *rect. CBF bis*
quad. CB
quad. AB.

Addito igitur utriſque quadrato CB,

(*quad. AC.* Æ. *rect. CBF bis*
(*quad. CB* *quad. CB bis*
quad. AB.

(g) Per 3. l. 2. *Atqui rectang. CBF bis, una cum quadrato CB bis, æquatur* (g) *rectangulo BCF bis:*

Ergo (*quad. AC* Æ. *rect. BCF bis*
(*quad. BC* *quad. AB.*

Fig. 23. 24. 25. Aliter & *univerſalius demonſtrabitur prop. 13. ſive cadat perpendicularis intra triangulum, ſive extra.*

(h) Per 7. l. 2. (i) Per 47. l. 1. (k) Per eamd. $BCq + CFq =$ (h) 2 *rect.* $BCF + BFq$. *Adde utrinque* AFq; $BCq + CFq + AFq = 2$ *rect.* $BCF + BFq + AFq$. *Sed* $CFq + AFq =$ (i) ACq, & $BFq + AFq =$ (k) ABq. *Ergo* $BCq + ACq = 2$ *rect.* $BCF + ABq$. *Q.E.D.*]

Sc ho-

Digitized by Google

Scholium (1.)

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimenſio cujuſcumque trianguli cujus tria latera ſint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſ. 41. l. 1.

Eſto trigonum quodcumque ACB nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppoſitum BC demiſſam. Fig. 23. vel 24.

Quadratum lateris AB acuto C oppoſiti, aufer ex ſumma quadratum AC, CB. Per 13. reſiduum erit rectangulum BCF bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt, rectangulum BCF) divide per notum latus BC. Proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato AC. Reſiduum dabit quadratum AF, cujus radix quadratica dabit perpendicularem AF.

[*Ex. gr. ſit* $AB = 13$, & $BC = 14$, & $AC = 15$. *Erit* $ABq = 169$, & $BCq + ACq = 196 + 225 = 421$. *Unde* $2\,BCF (= BCq + ACq - ABq = 421 - 169) = 252$, & *propterea* $BCF = 126$, & $CF = 9$. *Ergo* $AFq\ (= ACq - CFq = 225 - 81) = 144$; & $AF = 12$. *Et trianguli area erit* $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$. Fig. 24.

Obtinere id ipſum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. ſufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat. Fig. 23. 24.

[*Ne autem Tyronibus deſit exemplum, quo etiam ex prop. 12. aream trianguli obtuſanguli, (ubi perpendicularis cadit extra triangulum.) datis lateribus, obtinere poſſint; In triangulo obtuſangulo ABC, (fig. 22.) ſit* $AB = 20$, $AC = 13$, $BC = 11$. *Erit* $ABq = 400$, $ACq + BCq = 169 + 121 = 290$. *Unde* $ABq - ACq - BCq = 400 - 290 = 110 = 2\,BCF$, $BCF = 55$, $CF = 5$, $CFq = 25$, $ACq - CFq = 169 - 25 = 144 = AFq$. *Unde* $AF = 12$, & $\frac{1}{2}\, AF \times BC = 6 \times 11 = 66$ *eſt area trianguli ABC.*] Fig. 22.

Scholium (2.) *Si a trianguli cujuſvis (ACB) vertice (A) in baſim (CB) ſi opus productam, demittatur perpendiculum (AF;) erit differentia quadratorum e lateribus (AC, AB,) æqualis duplo rectangulo ſub baſi (CB,) & (CF — ½ CB) diſtantia perpendiculi a medio baſis.* Vide Arithmet. Univerſ. pag. 103. edit. primæ. Fig. 24. 25.

Nam

Nam per hanc prop. $ACq + BCq = ABq + 2\,BCF$.

Et ſubductis utrimque $ABq + BCq$, *erit* $AC - ABq = 2\,BCF - BCq$.

(a) Per cor. 4. p. 4. l. 2. *Sed* $BCq =$ (a) $2BC \times \frac{1}{2} BC$. *Ergo* $ACq - ABQ = 2BC \times \overline{CF - \frac{1}{2} BC}$. Q. E. D.

Fig. 26. (b) Per n. 1. Schol. p. 26. l. 1. *Si latera AB, AC ſint æqualia, perpendiculum cadet in medium* (b) *baſis; adeoque tum differentia quadratorum e lateribus, tum diſtantia perpendiculi a medio baſis ſimul evaneſcunt.*

Si alteruter angulorum ad baſim ſit rectus, ut B; perpendiculum AF cum latere AB coincidet; & differentia qua-
(c) Per pr. ob. 2. poſt 47. l. 1. *dratorum e lateribus* (c) *æquabitur quadrato baſis CF. Diſtantia autem perpendiculi a medio baſis æquabitur baſis dimidio, & proinde duplum rectang. ſub baſi & iſta diſtantia,*
(d) Per cor. 4. Pr. 4. l. 2. *hoc eſt, ſub baſi & baſis dimidio,* (d) *æquabitur etiam quadrato baſis. Quare differentia quadratorum e lateribus æqualis erit duplo rectangulo ſub baſi & diſtantia perpendiculi a medio baſis.*

Fig. 28. Schol. 3. *Si a trianguli cujuſvis ABP vertice A ducatur recta AC baſem BP biſecans in C, erunt quadrata laterum AB, AP ſimul ſumpta, dupla quadratorum dimidiæ baſis BC, & rectæ AC biſecantis baſem, ſimul ſumptorum. A vertice A*
(e) Per cor. 3. p. 32. l. 1. *demittatur AF perpendicularis baſi, & cadat inter C & P.* (e) *Erit itaque angulus ACB obtuſus, & ACP acutus. Unde per prop. 12, erit* $ABq = ACq + CBq + 2\,BCF$ *& per prop. 13, erit* $APq = ACq + CPq - 2\,PCF$. *Sed propter* $BC =$
(f) Per axio. 15. PC, *erit* $CBq =$ (f) CPq, *&* $2\,BCF =$ (g) $2\,PCF$. *Unde* CBq
(g) Per 36. l. 1. $+ CPq =$ (h) $2\,CBq$, *&* $2\,BCF - 2\,PCF$ (i) $= 0$. *Ergo æqualibus addendo quantitates æquales, provenient æqualia*
(h) Per axio. 9. *aggregata,* $ABq + APq = 2\,ACq + 2\,CBq$. Q. E. D.
(i) Per axio. 3. Coroll. *Iiſdem manentibus baſe BP, & recta AC biſecante baſem, utcumque ad baſem varie inclinata, ut aC, idem manebit aggregatum quadratorum crurum; ſcil.* $ABq + APq = aBq + aPq$ *Et ſic ubique.*

Hæc autem propoſitio ad Curvarum tangentes, diametros & ordinatas applicari poteſt. Tangant v. gr. rectæ AB, AP, conicam quamlibet ſectionem vel ſectiones oppoſitas in B & P; & juncta BP biſecetur recta AC: erit BC vel PC ordinata ad diametrum AC. Unde quadrata tangentium AB. AP dupla erunt quadratorum ordinatæ BC vel PC, & diametri inter ordinatam ac tangentium concurſum interceptæ AC. Hac etiam propoſitione utitur Serenus Antiſſenſis in ſectione coni a plano per verticem ducto. Verum hæc extra oleas.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIV.

D*Ato rectilineo* (QXZ,) *æquale quadratum conſtruere.* *Fig.* 19.

[*Sume rectam quamvis IA, ſuper qua*] rectilineo QXZ fac æquale (*a*) parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA, ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum quod petitur: ſi inæqualia ſint, latus majus IA produc in L, donec AL ſit par AC. IL biſeca in Z; quo centro per I & L deſcribe circulum, & producatur CA donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale eſt dato QXZ.

(a) *Per* 45. *l.* 1.

Ducatur enim recta ZB, Quoniam IL ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A; erit

(rect. IAL
quad. ZA) Æ. (*b*) quad. ZB; hoc eſt, (b) *Per* 5. *l.* 2.

Æ. (*c*) quad. ZB; hoc eſt, (c) *Per conſtr. & def. circuli.*

Æ. (*d*) quad. (ZA
quad. BA)

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi, remanet (d) *Per* 47. *l.* 1.

rect. IAL Æ. quad. BA:

hoc eſt, quia AC, AL ſunt æquales, erit

rect. CI,

Id eſt, (*e*) rectil. QXZ Æ. quad. AB. (e) *Per conſtr.*

Scholium.

Conſtructio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditius problema abſolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot poteſt. Tum ſingulis quadrangulis fac (*f*) rectangula æqualia. Si tunc ſuperſit (ut hic contigit) unum triangulum (Q.) illi quoque fac (*g*) æquale rectangulum. Singulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale (*h*) fiat. Erit hoc æquale dato QXX.

(f) *Per ſch.* 2 *p.* 45. *l* 1.
(g) *Per cor. p* 42. *l.* 1.
(h) *Per prob.* 1. *ſch. p.* 47. *l.* 1.

Digitized by Google

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER TERTIUS.

PErfectiſſimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri utilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Matheſim univerſam fonte uberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16,20,21,22,31,32,35.36.

COntinet *autem liber hic* tertius *circuli proprietates: lineaſque plurimas* & intra *ejuſdem peripheriam* & extra *ad eamdem ductas inter ſe comparat. Circulorum etiam ſe mutuo interſecantium, & ſe mutuo, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam ſive ad centrum ſive ad circumferentiam poſitos inter ſe componit. Breviter, Prima* Geometriæ Practicæ *elementa, circulorum adminiculo potiſſimum innixa, exponit.*

DEFINITIONES.

1. CIrculi æquales ſunt, quorum diametri ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

Fig. 21. l.3. 2. Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non ſecet.

Fig. 14. & 15. 3. Circuli tangere ſe dicuntur, cum ſibi ſic occurrunt, ut tamen non ſecent.

Fig. 19. 4. In circulo æqualiter a centro (A) diſtare dicuntur rectæ (BC, FL) cum perpendiculares (AI, AO) quæ ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. [*Et ſi perpendiculares in*
Fig. 20. *rectas*(XZ, BI) *demiſſæ, ſint inæquales, magis a centro diſtare dicitur ea recta*(XZ) *in quam cadit major perpendicularis.*]

Fig. 38. 5. Segmenta, ſeu portiones circuli ſunt partes (CQE, CSE) in quas circulum dividit recta (CE) circulum ſecans, [*quæ ſegmenti utriuſque baſis eſt.*]

Fig. 34, 35. 6. Angulus in ſegmento eſt (BQC) qui continetur ſub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex ſegmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 34. 7. Angulus (CQB) inſiſtere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 12. 8. Sector eſt pars circuli a duabus ſemidiametris (AB, AF)

& arcu

& arcu (BF vel BCF) quem ſemidiametri intercipiunt, comprehenſa.

[9. *Angulus* (BAO) *ſegmenti* (AB QO) *eſt, qui baſi ſegmenti* (BA) *& arcu* (QOA) *comprehenditur.* Fig. 22.

10. *Recta* BC *circulo inſcripta, vocatur arcuum* B A C, BIC, *vel anguli ad centrum* BDC chorda *ſive* ſubtenſa. *Et, ſi ab arcus* AB *extremo* B *ducatur diameter* AI, *& in eam ab altero arcus extremo* B *cadat perpendicularis* BG *; appellatur hac arcuum* BA, BI, *ſive angulorum ad centrum* BDA, BDI ſinus rectus, *vel ſimpliciter* ſinus *; eritque* GA, *arcus* AB *vel anguli* ADB (*&* GI *arcus* IB *vel anguli* IDB) ſinus verſus. *Porro, ſi producatur radius* DB *donec recta* EF (*circulum tangenti in* A) *occurrat in* E, *recta* AE *nominatur arcuum* AB, BI, *vel angulorum* ADB, BDI tangens, *& recta* DE *eorumdem arcuum vel angulorum* ſecans. *Præterea, anguli ad centrum recti* ADK *ſinus rectus* DK *(qui in hoc caſu, circuli radius erit,) peculiari nomine* ſinus totus *appellatur. Denique ſinus rectus* BL *anguli* BDK *(quod complementum eſt anguli* ADB *ad rectum) vocatur* coſinus *anguli* ADB *: item* HK *tangens, &* HD *ſecans ejuſdem anguli* BDK, *eſt anguli* ADB cotangens & coſecans *reſpective.*] Fig. 40.

PROPOSITIO I.

D*Ati circuli centrum invenire.*

Ducatur in circulo recta BC utcumque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biſeca in A. Erit A centrum. Fig. 1. l. 3.

Si negas; centrum eſto O extra rectam FL, (nam in FL eſſe non poterit, cum ubilibet extra A dividatur inæqualiter;) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ ſibi mutuo æquilatera ſunt, cum etiam ex conſtr. BQ. & QC ſint pares, & QO communis. Ergo (*a*) angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC (*b*) rectus eſt, ac proinde angulo LQC per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum.

(a) *Per* 8. *l.* 1. (b) *Per def.* 14. *l.* 1.

Corollarium.

EX demonſtratis patet, ſi in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam & perpendiculariter ſecat, in ſecante eſſe centrum. Fig. 2.

Facillime per normam invenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta

D & E, quibus normæ latera peripheriam ſecant, biſecetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex 31. hujus.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. **S**I *in circuli ambitu duo puncta ſumantur* (B, C,) *recta quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.*

Accipiatur in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam (*a*) anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC (*b*) major eſt interno B, major erit quoque quam C. In triangulo igitur OAC, latus AC ſubtendens majorem angulum AOC, majus eſt (*c*) latere AO ſubtendente minorem C. Cum igitur AC tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum.

(a) Per 5. l. 1.
(b) Per cor. 1 p. 32. l. 1.
(c) Per 19. l. 1.

Cor. *Hinc ſequitur rectam quamvis lineam circulum tangentem, in unico puncto eumdem tangere. Si enim circumferentiam punctis duobus tangeret; eſſet* recta linea per duo circuli puncta ducta, *atque adeo* (d) *intra circulum caderet, contra tangentis definitionem. Et ſimili ratiocinio (a planis ad ſolida tranſeundo) probari poſſet planum quodvis ſphæram in unico puncto tangere.*

(d) Per hanc prop.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. **S**I *in circulo recta per centrum ducta* (BL) *aliam* (CF) *non per centrum ductam ſecet bifariam* (in O,) *ſecabit quoque perpendiculariter.* Et *ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam.*

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt: Nam CO, FO ex hypotheſi, & AC, AF quia ex centro, æquales ſunt; AO vero communis eſt. Ergo (*e*) anguli AOC, AOF æquales. Ergo (*f*) recti. Quod erat primum.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF ſunt recti, erit quad. AC. (*g*) æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia (*h*) ſint, etiam duo ſimul AO, CO duobus ſimul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrinque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO ſunt æquales. Quod erat alterum.

(e) Per 8. l. 1.
(f) Per def. 14. l. 1.
(g) Per 47. l. 1.
(h) Per axio. 13.

[Cor.

[Cor. 1. *Dimidium chordæ angulum quemvis ad centrum ſubtendentis, eſt ſemiſſis anguli iſtius ſinus rectus. Chorda* CF *anguli ad centrum* CAF , *perpendicularis a centro ducatur* AO . *In triangulis* X , Z , *erunt* CO , FO (a) *æquales* , AO *communis* , & *anguli ad* O *recti. Ergo anguli* CAO , FAO *æquales* (b) *erunt. Quare angulus* CAO *ſemiſſis erit anguli* CAF , & *recta* CO *dimidium chordæ* CF. *Sed* CO *eſt ſinus* (c) *rectus anguli* CAO . *Ergo dimidium chordæ , angulum quemvis ad centrum ſubtendentis , eſt ſemiſſis anguli iſtius ſinus rectus .* (a) Per hanc prop. (b) Per 4. l. 1. (c) Per def. 10. l. 1.

Cor. 2. *Si trianguli cujuſvis æquilateri , aut etiam tantum Iſoſcelis* ACF *ſumatur vertex* A *pro circuli centro , & alterum æqualium crurum* AC *pro radio , circulus tranſibit* (d) *etiam per* F : *atque inde , vi hujus prop. ſi recta* AO *a vertice trianguli iſoſcelis biſecet baſim , ei quoque perpendicularis erit , & ſi baſi fuerit perpendicularis , eam biſecabit . Et inde etiam deduci poſſent ceteræ proprietates quæ in Schol. p.26. l. 1. aliunde derivantur .* (d) Per def. 18. 19. & 26. l. 1.

Scholium . *Si a vertice trianguli Iſoſcelis* ABC *ad quodvis punctum baſis recta linea ducatur ; erit quadratum ductæ rectæ una cum rectangulo ſub ſegmentis baſis , æquale quadrato lateris* AB *vel* AC . *Nam recta a vertice* A *ducta , vel erit baſi* BC *perpendicularis , vel non . Sit primo ducta recta* AD *perpendicularis baſi ; erit* BD = (e) DC, & *proinde rectang.* BDC = BD*q* , *vel* DC*q*. *Sed* AD*q* + BD*q* = (f) AB*q* ; *hoc eſt* AD*q* + *rect.* BDC = AB*q*. *Q. E. D.* Fig. 4. (e) Per cor. 2. hujus . (f) Per 47. l. 1.

Sed recta ducta ſit AE , *non perpendicularis baſi ,* & *ducatur perpendicularis* AD , *quæ baſim in* D (g) *biſecabit . Cum igitur recta* BC *ſit bifariam ſecta in* D & *non bifariam in* E, (h) *erit rectang.* BEC + ED*q* = BD*q*. *Adde utrinque* DA*q*, & *rect.* BEC + ED*q* + DA*q* = BD*q* + DA*q*. *Sed* ED*q* + DA*q* = (i) AE*q*, & BD*q* + DA*q* = (k) AB*q*. *Ergo rect.* BEC + AE*q* = AB*q*. *Q. E. D.* (g) Per cor. 2. hujus. (h) Per 5. l. 2. (i) Per 47. l. 1. (k) Per eamd.

PROPOSITIO IV.

SI *in circulo duæ rectæ* (BC , FL) *non ambæ per centrum ductæ , ſe ſecent , non ſecabunt ſe mutuo bifariam .* Fig. 5. & 6.

Nam ſi una LF tranſeat per centrum , patet hanc non biſecari ab altera BC, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit . Fig. 6.

Si neutra per centrum tranſit , ex A centro duc AO. Si jam ambæ BC, FL forent biſectæ in O, anguli quoque AOC, AOL eſſent (*l*) recti, ac proinde æquales , totum & pars . Quod fieri non poteſt . Fig. 5. (l) Per pra.

Digitized by Google

PROPOSITIO V & VI.

Fig. 7. & 8. C*Irculi ſe mutuo ſecantes, aut interius tangentes, non habent idem centrum.*

Alias enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, eſſent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ ſunt æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 9. S*I in circulo, quodvis aliud a centro (A) accipiatur punctum (C,) ex quo rectæ plures (CB, CL, CO, CF) in circumferentiam cadant;*

1. *Maxima erit (CB) quæ per centrum tranſit.*
2. *Reliqua diametri pars (CF) minima.*
3. *Aliarum vero major eſt ea, quæ maximæ (CB) propior.*
4. *Neque plures quam duæ ex diicto puncto (C,) quod a centro diverſum ejt, ad circumferentiam duci poſſunt æquales.*

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales ſunt, addita communi AC, erunt LA cum
(a) Per 20. l. 1. AC, & BC æquales. Sed LA, AC ſunt majores (*a*) quam LC. Ergo etiam BC major eſt quam LC. Eodem modo BC oſtendetur major quavis alia.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc eſt, AF)
(b) Per eand. eſt minor (*b*) quam AC, CO. Ablata igitur communi AC, remanet FC minor quam CO. Eodem modo erit CF minor quavis alia.

Pars 3 In triangulis COA, CLA, latera LA, AC æquantur lateribus OA AC; angulus vero LAC major eſt angulo
(c) Per 24. l. 1. OAC. Ergo (*c*) baſis LC major baſi OC.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eamdem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

Coroll. *Simili plane ratiocinio cum Theodoſio colligimns, Arcuum circulorum maximorũ, a puncto quovis a circuli dati polo diverſo, in ſuperficie ſphæræ ad circulum iſtum ductorum, maximum eſſe eum qui per circuli polum tranſit; minimum qui ad*

punctum

punctum oppoſitum dati circuli ducitur; reliquorum vero eum eſſe majorem qui maximo eſt propior: duos vero ſolum inter ſe æquales ab eodem puncto ad circulum duci poſſe. Neque aliter de pleriſque hujus libri propoſitionibus Lector per ſe ratiocinabitur. A planis enim ad ſolida in hiſce rebus tranſire eſt ſane facillimum.

PROPOSITIO VIII.

SI a puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF, AO, AQ, AR,) Fig. 10. & 11.

1. Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima eſt (AB) tranſiens per centrum (Z.)

2. Aliarum major eſt ea, quæ maximæ (AB) propior.

3. Extra circulum minima eſt (AO) quæ producta per centrum tranſit.

4. Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.

5. Non plures quam duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci poſſunt æquales, ſive intra circulum, ſive extra.

Pars 1. Ex centro Z duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; addita communi AZ, erunt AZ, ZC ipſi AB æquales. Sed AZ, ZC majores ſunt (*a*) quam AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis alia. Fig. 10. (a) Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus vero CZA major eſt angulo FZA. Ergo (*b*) baſis CA major baſi FA. (b) Per 24. l. 1.

Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores (*c*) ſunt quam AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO, remanet AO minor quam AQ. Eodem modo AO minor erit quavis alia. Fig. 11. (c) Per 20. l. 1.

Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ & QZ minores ſunt (*d*) quam AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR, remanet AQ minor quam AR. (d) Per 21. l. 1.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quam duæ æquales ad ambitum duci poſſint; Id punctum centrum erit. Fig. 12.

Patet ex 4. parte prop. 7.

Digitized by Google

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Circuli in duobus tantum punctis ſe mutuo ſecant.*

Secent enim, ſi fieri poteſt, in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ ſunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit A (*a*) centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS ſe ſecantes habent idem centrum, quod repugnat propoſitioni 5.

(*a*) Per præc.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14. *Si duo circuli ſe intus tangant; recta per eorum centra (A & I) ducta tranſibit per contactum (B.)*

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens, cadat extra contactum B, ſecans circulos in O & L, ſintque centra ipſa A & C; ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, addita communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed (*b*) AC, CB ſunt majores quam AB; Hoc eſt (*c*) quam AL. Ergo Etiam AO major eſt quam AL, pars toto. Quod eſt abſurdum.

(*b*) Per 20. *l.* 1.
(*c*) Per def. circuli.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. *Si circuli ſe tangant exterius; recta conjungens centra, per contactum tranſibit.*

Si negas, ſint, ſi fieri poteſt, centra ita poſita, puta in A & B, ut recta per ipſa tranſiens, per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur (*d*) AS, SB majores quam AB. Sed AS (*e*) eſt par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ ſunt majores quam tota AB, pars toto. Quod fieri non poteſt.

(*d*) Per 20. *l.* 1.
(*e*) Per def. circuli.

[Coroll. ad duas præced. *Si duo circuli ſe tangant vel interius vel exterius; recta a centro unius per contactum ducta, tranſibit*

tranſibit per centrum alterius. Ejuſmodi enim recta non differet a recta per eorum centra ducta, quæ per haſce propp. 11. & 12. tranſibit per contactum.]

PROPOSITIO XIII.

C*Irculi & ſeſe mutuo, & lineam rectam punctualiter tangunt.* Fig. 16. & 17.

Tangant enim ſe intra (ſi fieri poteſt) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A & B ducta recta (*a*) tranſibit per contactum, puta in C. Ducantur inſuper AL, BL. Quoniam igitur (*b*) BL, BC æquantur, (ſunt enim ex centro B ad peripheriam OLC,) addita communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC eſt par AL, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam QLC. Ergo etiam AB, BL ſunt æquales AL, contra 20. l. 1. Fig. 16. (a) Per 11. l. 3. (b) Quia ex centro.

Tangant ſe deinde exterius duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu OL. Recta AP centra A & P jungens (*c*) tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipſis, AO, PO, ſeu toti AP. Contra 20. l. 1. Fig. 15. (c) Per 12. l. 3.

Denique recta BF & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliqua CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE eſt Iſoſceles. Quare (*d*) anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF, ducta ex A centro, cadet inter (*e*) C & E, puta in D. Erunt igitur tam AC, quam AE æquales perpendiculari AD, quod eſt abſurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. Fig. 17. (d) Per cor. 11. p. 32. l. 1. (e) Per cor. 3. p. 32. lib. 1.

Corollarium.

C Irculi qui habent centra in una recta, eamque ſecant in eodem puncto B, ſe mutuo in puncto illo B contingunt. Fig. 18.

Ceterum hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ, aut duæ convexæ, ſecundum ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem, ſi ſe invicem in tota parte aliqua tangerent.

Digitized by Google

PROPOSITIO XIV.

Fig. 19. *IN circulo æquales rectæ (BC), LF) æqualiter a centro diſtant: & quæ diſtant a centro æqualiter, ſunt æquales.*

Ex centro A ducantur AC, AF; item AO, AI ad
(a) Per 3. l. 3. angulos rectos ipſis BC, FL. Erunt (*a*) BC, FL biſectæ in O & I.

Cum ergo totæ BC, FL ponantur æquales etiam dimi-
(b) Per axio. 15. diæ OC, IF, adeoque & (*b*) quadrata ipſarum æquantur.
(c) Per 47. l. 1. Jam vero quad. AC (*c*) æquale eſt quadratis OC, OA: &
(d) Per def. circuli & axio. 15. quadratum AF æquatur quadratis IF, IA. Cum igitur quadrata AC, AF (*d*) æqualia ſint, etiam duo quadrata OC, OA, duobus IF, IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadra-
(e) Per axio. 15. tis OC, IF (quæ ante oſtenſa ſunt æqualia,) quæ remanent, quad. OA, IA, æqualia erunt. Ergo etiam perpen-
(f) Per def. 4. l. 3. diculares OA, IA ſunt (*e*) æquales. Ergo BC, FL æquales, à centro diſtant (*f*) æqualiter. Quod erat primum.

E converſo, ſi diſtantiæ OA, IA ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium OA, IA, eodem diſcurſu oſtendetur quadrata reliqua OC, IF fore æqualia,
(g) Per 3. l. 3. ac proinde & rectas OC, IF æquales eſſe, quæ cum ſint (*g*) ſemiſſes rectarum BC, FL, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 20. *REctarum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter. Ceterarum ea major, quæ centro propior.*

Sit quævis RS alia a diametro FL. Ex centro duc
(h) Per 20. l. 1. AR, AS. Duæ AR, AS æquantur diametro FL, & ſunt (*h*) majores quam RS. Ergo, &c

Sit deinde BI propior centro quam XZ. Ex centro ad
(i) Per def 4. l. 3. illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ (*i*) major quam AC. Accipe ergo AO parem AC, & per O duc RS
(K) Per prec. perpendicularem ad AO, quæ (*K*) par erit BI; junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum eſt, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem
(l) Per 24. l. 1. RAS, major eſt angulo XAZ. Ergo baſis RS, hoc eſt BI major (*l*) eſt baſi XZ. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XVI.

R*Ecta* (*F*) *quæ per* (*B*) *extremitatem diametri* (*CB*) *Fig. 21.*
perpendicularis eſt, tota cadit extra circulum, eum-
que tangit (*in B*;) *Neque inter ipſam & circulum, alia re-*
cta ad contactum (*B*) *duci poteſt, quin circulum ſecet.*

Pars 1. Accipiatur in recta IBF quodvis punctum L, ad
quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quo-
niam angulus ABL rectus eſt per hyp. erit ALB (*a*) acutus. (a) *Per*
Ergo AL oppoſita majori angulo ABL, major eſt (*b*) quam *cor. 5. p. 32.*
AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantum pertin- *l. 1.*
git ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam (b) *Per*
porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum eſt. [*Idem* *19. l. 1.*
oſtendetur de quovis alio puncto rectæ IF, a B diverſo. Qua-
re, cum recta IF ita circulo occurrat in unico puncto B, ut
eum non ſecet,] Tota igitur IF extra circulum cadit, [*eum-*
que tangit (c) *in B.*] Quod erat primum. (c) *Per*
Pars 2. Infra BF (ſi fieri poteſt) cadat RB tota extra *def. 2. l. 3.*
circulum. Quoniam FBA rectus eſt per hyp. erit RBA a-
cutus, ac proinde AB non eſt perpendicularis ad BR. Du-
catur igitur ex A centro ad BR, perpendicularis AO, quæ
cadet (*d*) verſus R, & ſecabit circulum in Q. Igitur AB op- (d) *Per*
poſita majori angulo, nempe AOB recto, major eſt quam AO *cor. 3.*
quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par eſt *p. 32. l. 1.*
AQ: Ergo etiam AQ major eſt quam AO, pars toto.

[*Euclides hanc propoſitionem ſic effert:*

1. Recta IF, diametro circuli CB ad rectos angulos ab extremitate ducta, cadit extra circulum: 2. & in locum qui inter rectam lineam BF & circumferentiam QB interjicitur, altera recta linea RB non cadet: 3. & ſemicirculi angulus ABQ major eſt quovis angulo rectilineo acuto; reliquus autem QBF minor.

Partem primam & ſecundam jam demonſtravit Tacquetus; reliquas duas pro paradoxis male fundatis rejecit, haud recte quidem, ut mihi videtur. Si enim dari poſſet angulus quivis rectilineus acutus ABR, (angulo ſcil. recto ABF minor,) qui tamen major eſſet angulo ſemicirculi ABQ; vel ſi quivis angulus rectilineus FBR dari poſſet, inter tangentem FB & circulum QB, ad punctum B conſtitutus; ſequeretur rectam inter tangentem & circulum duci poſſe, quæ tamen circulum non ſecet, contra partem ſecundam.]

Corol-

Corollaria.

Fig. 21. HInc rurſum patet contactum rectæ lineæ & circularis eſſe punctualem.

Fig. 18. 2. Si centris in eadem linea recta in infinitum protracta acceptis, deſcribantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quacumque data majorem excreſcentes, propius ſemper ac propius in infinitum tangenti appropinquant, numquam tamen ei præterquam in unico contactus puncto conjunguntur: quod quamvis evidentiſſimum ſit, eſt tamen revera admirabile.

Fig. 18. 4. Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcumque in infinitum eſſe diviſibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in recta BA ſine termino producta, rectam IF per coroll. 2. hic, & ſe mutuo per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum recta IF conjunguntur præterquam in B. Ergo neceſſe eſt ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc eſt, in non tot quin plures.

Fig. 21. 5. Angulum contingentiæ ſeu contactus LBQ (eum nempe qui tangente & peripheria continetur) nulla recta linea poteſt dividere.

Fig. 18. 6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt, lineæ rectæ ad Hyperbolam una ſecum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocumque dato minus, numquam tamen concurrentis: quod præclare obſervavit & demonſtravit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate, lib. 16.

Fig. 18. [*Angulus contactus (uti vulgo appellatur,) per circumferentias in eodem puncto tangentes non minuitur, utpote qui nullus eſt, vel non quantus, ſeu non angulus. (Vide Walliſ. de angulo contactus.) Angulus enim (per def. 8. l. 1.) eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram* inclinatio: *recta autem QI circumferentiam unam vel plures in unico puncto B contingens, in ipſo contactus puncto, (illic enim, ſi quis ſit, exiſtit angulus,) non* inclinatur *ad illas circumferentias, ſed cum iis prorſus coincidit.*

Hoc

Hec igitur corollarium ſextum, quatenus verum eſt, non differt a tertio. Hinc autem ſequitur

7. Angulum ſemicirculi ABQ eſſe angulo recto rectilineo ABF æqualem. Si enim locus iſte QBF qui inter circulum & tangentem interjicitur, ad punctum B ſit non angulus, ſive non-quantus; eo igitur ab ABF ablato, angulus rectus non minuitur; ac proinde angulus ſemicirculi ABQ adhuc manet rectus. Fig. 21.

Ceterum quæſtionem in Scholio ſubſequente agitatam, longe accuratius tract. Celeberr. Wallisius, Operum Mathematicorum volum. 2. (in ſua de anguio contractus & ſemicirculi *diſquiſitione Geometrica, pag. 605.—630, ejuſque defenſione, pag. 631—664.) quo itaque lector qui hiſce oblectatur eſt remittendus. Tyrones interim, omiſſo hoc Scholio, ad prop. 17. & ſeqq. cum aliquo temporis operæque compendio tranſibunt.*]

Scholium.

Demonſtratur & ſolvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci ſolent.

Atque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta, & mira & certa ſunt. Quæ vero deduci ex eadem ſolent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio ſubtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus afferendis anſam præberet. Et plane, quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa quæ ex 16. inferri ſolent; ex aliis multis, hæc fere præcipua ſunt.

1. Angulus contingentiæ (OAC) omni acuto minor eſt. Fig. 22.
Acutus eſto PAC. Ab hoc auferri poteſt dimidius, & a reſiduo iterum dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocumque dato minor. Quantumvis enim in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli, exempli gr. anguli QAC latus unum QA (a) intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus OAC intra acutum continebitur, ejuſque pars erit, ideoque illo minor. (a) Per 16. l. 3.

2. Angulus ſemicirculi (BAO) licet recto minor ſit, eſt omni acuto major. Quia ob eamdem cauſam, acutus quantumvis magnus BAQ, intra ſemicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inſeruntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea ſint, an ab aliquo adjecta. Apollonius, certe magnus Geometra, cum eamdem affectio-

nem

nem in ellipſi, hyperbola & parabola demonſtrat, has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus CAB (imo acutus quicumque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo eſt major. Nam angulus CAB dividi poteſt in acutos infinitos minores ſemper & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt majores (*a*) angulo contactus OAC.

(a) *Per paradox. 1.*

4. Angulus contactus CAO eſt vera pars anguli recti CAB, eumdem quippe una cum ſemicirculi angulo OAB conſtituit: nequit tamen ulla ſui multiplicatione ſuum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.

5. Tranſitur a minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: ſive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam ſi recta AB, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios poſſibiles, qui quamvis ſemper augeantur, ſemper tamen erunt minores (*b*) ſemicirculi angulo BAO, quum primum vero AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo ſemicirculi.

(b) *Per paradox. 2.*

Hæc & plura alia ex hac 16. propoſitione deduci ſolent: quæ profecto, ſi ita, ut proponuntur, ſeſe habeant; merito incomprehenſibilia videri poſſent. Peletarius, ut his paradoxis ſe expediat, negat angulum contactus eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſſet nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cum inde infert omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod plane non inferret, ſi intelligeret, quod de contactus angulo aſſeverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio noſtro in ſua illa adverſus Peletarium apologetica diſputatione aſſentior. Mea quidem ſententia uterque fallitur; hic dum omnes omnino angulos eſſe putat quantitatem; ille dum omnes præter angulum contingentiæ. Alii ſe exiſtimant hac una reſponſione omnes difficultates ſolvere, ſi dicant, curvilineos angulos & rectilineos eſſe incomparabiles. Rogati vero, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactus quantumcumque multiplicatus, numquam poteſt æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirum fieri poſſit, ut angulus contactus anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcumque multiplicatus eumdem ſuperare nequeat. Reſpondent angulum contactus non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant, hinc ſolum ſequi non eſſe partem recti aliquotam: veram tamen eſſe

partem,

partem, eo quod cum ſemicirculi angulo rectum componat. Unde qui hac via difficultates propoſitas volebant diſſolvere, debuerant oſtendere angulum contactus nullo ſenſu partem eſſe rectilinei anguli, neque addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidea definitione anguli pendere. Hæc enim, ſi penitius expendatur, manifeſte docet nullum angulum eſſe quantum, quo uno errore ſublato, paradoxa omnia evaneſcunt. Sentio igitur: *Def. 8. l. 1.*

1. Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Cum enim curvitas non ſit quantitas; cur inclinatio ſit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde; Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficies, vel corpus. Non eſſe lineam aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt: ea enim, ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque poteſt dici angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus ſit. *Fig. 23.*

2. Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quanti, eorum inter ſe comparatorum relatio, non eſt æqualitas & inæqualitas, ſed ſimilitudo & diſſimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter ſe comparati æquales dicantur aut inæquales, non aliud intelligi poteſt, quam eos ſimiles eſſe inter ſe aut diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere, ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt; diſſimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuo impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera; diſſimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifeſtum eſt, nullum angulum curvilineum, æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt quam ſimilitudo, per concluſ. 2. & 3. Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia, per concluſion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis, ita ratioci-

Fig. 24. tiocinatur : æqualium ſemicirculorum anguli EAD , CAB æquales ſunt . Ergo ſi his addatur communis angulus CAD erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma , ſi æqualibus addas vel demas æqualia , tota , vel reliqua erunt æqualia ? Nequaquam : hoc enim ad res quantas ſolum pertinet : anguli porro quanti non ſunt . Axioma ut in angulis valeat, ita formari ac intelligi debet . Similes anguli , ſi apponantur ſimilibus angulis , ſimiliterq; poſitis , qui tum oriuntur , erunt ſimiles . At Proclus comparat angulos ſimiles quidem : ſed communis , qui utriſque additur , cum ab una parte habeat latus rectum , ab altera curvum , diſſimiliter utriſque additur .

6. Quare cum tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio , non erit unus angulus pars alterius ; una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt : neque angulus auferri ab angulo poterit ; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab altera , &c. Hæc enim non laterum Inclinationibus , quæ quantitas non ſunt , ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt .

7. Poſtremo ex jam dictis colligemus , quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ , quibus Geometræ paſſim , atque ipſe in primis Euclides , utuntur , cum angulos ſecari, augeri , imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque ſimilia aſſerunt . Hæc ſane exiſtimabimus eos non proprie , ſed analogice tantum angulis tribuere ; itaque eos loqui voluiſſe, quod id commodius, & expeditius eſſet, neque tamen obnoxium periculo , modo in angulis rectilineis maneatur .

Fig. 25. Angulum itaque dividi recta DA, non aliud erit, quam inter latera EA, CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes , hoc eſt duos novos angulos efficiat. Angulum vero EAC eſſe duplum anguli EAD , nihil rurſum aliud erit , quam inter lineas rectas EA , CA , aliam interponi , quæ ad utramque ſimiliter inclinetur ; unde fiat ut rectæ EA, DA rectis CA, DA , inclinationibus non mu-

Fig. 25. & 26. tatis , impoſitæ congruant . Quod ſi ita ratiocinentur :(Angulus EAD eſt æqualis angulo ILQ , & DAC eſt æqualis QLR ; ergo totus EAC toti ILR æqualis eſt :) Idem erit , ac ſi dicatur ; Inclinatio rectarum EAD ſimilis , ſeu eadem , eſt inclinationi rectarum ILQ ; & inclinatio rectarum DAC ſimilis eſt inclinationi rectarum QLR : Ergo etiam inclinatio rectarum EAC ſimilis erit inclinationi rectarum ILR . Vel certe (quod recidet in idem , ex aſſertione 4. ſupra) collectionem illam ſic intellige : latera EAD congruunt lateribus ILQ ; & latera DAC congruunt lateribus QLR : Ergo latera quoque EAC congruunt lateribus

Digitized by Google

ribus ILR. Quæ quidem conſecutio æque clara eſt, atque ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe. Ad eum modum locutiones ceteras, quæ, cum ſint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique ſalva, interpretabimur.

His ita conſtitutis, facile paradoxa angularia diſſolvemus; quæ ſane non aliunde enata ſunt, quam quod angulos eodem, quo ceteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur ſimul omnia expediam; Dico paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non convenient niſi quanto: anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactus neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei; neque in rectilineo continetur infinities, imo ne ſemel quidem; nihil enim horum, linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si vero non proprie, ſed analogice accipiantur, jam nihil continent, quod a communi ſenſu ac ratione alienum ſit. Sic enim, angulum contactus OAC eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud ſignificabit, quam infra tangentem CA, nullam poſſe duci rectam ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur, eſt tamen ejuſmodi quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti ſenſus erit. Atque ita unius Euclideæ definitionis ducta, ſive perſpecta natura anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evaneſcunt. Fig. 22.

PROPOSITIO XVII.

A *Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (OQ) tangat.* Fig. 27.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB, ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum, BC, & ex O duc OC perpendicularem ad AB, quæ occurrat circulo BC in C. Duc CA, occurrentem circulo OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, anguluſque A communis eſt in trigonis IAB, OAC, etiam (a) anguli AOC, AIB æquales ſunt. Sed (b) AOC rectus eſt. Ergo etiam rectus eſt AIB. Ergo BI (c) tangit in I.

(a) Per 4.l.1.
(b) Per conſtr.
(c) Per 16.l.3.

Scho-

Scholium.

Fig. 28. EX 31. ſeq. pulchre ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)

Centrum A & datum punctum O jungens recta biſecetur in P. Tum centro P, per A & O deſcribe circulum occurrentem dato in B. Recta OB tanget.

Nam juncta AB, angulus ABO in ſemicirculo rectus eſt, per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 29. *SI circulum tangat recta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis, alia quædam
(a) Per 1. part. p. 16. l. 1. recta AF: (*a*) ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit (*b*) ABF acutus. Ergo AB,
(b) Per cor. 5. p. 32. lib. 1. (hoc eſt AO) major (*c*) quam AF, pars toto.
(c) Per 19. l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 30. *SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI,) erit in ea centrum.*

Si negas, ſit centrum extra AI in Z, & ab eo ad con-
(d) Per præt. tactum ducatur ZA. Erit (*d*) angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. recto; hoc eſt, pars toti.

PROPOSITIO XX.

Fig. 31. 32. 33. *ANgulus ad centrum (BAC) duplus eſt anguli (BCF) ad peripheriam, cum idem arcus (B C) eſt baſis angulorum.*

Fig. 31. Triplex eſt caſus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum vero quia AF, AC ex centro ductæ æquantur,
(e) Per 5. lib. 1. ducta FC, erunt in triangulo Z anguli F & C (*e*) æquales. Sed

Digitized by Google

Sed BAC (*a*) æqualis eſt duobus F & C. Ergo BAC duplus (a) *Per 32. l. 1.*
eſt unius F.

In caſu ſecundo BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum *Fig. 32.*
vero ducta FAX, per caſum primum XAB eſt duplus XFB,
& XAC duplus XFC. (*b*) Ergo totus BAC duplus eſt to- (b) *Per 22. l. 5. qua ab hanc non dependet.*
tius BFC.

[*Sit XAB angulus graduum* 6: (c) *erit angulus XFB gra-*
duum 3. *Sit porro ang. XAC. gr.* 4: (d) *erit XFC gr.* 2. (c) *Per caſ. 1.*
Ergo XAB + XAC erit gr. 6. + 4 = *gr.* 10 = *BAC*; & (d) *Per eund.*
XFB + XFC gr. 3. + 2 = *gr.* 5. = *BFC. Denarius autem*
graduum numerus eſt quinarii duplus: ergo & angulus BAC
duplus eſt anguli BFC.]

In tertio caſu BF ſecat AC, & anguli BAC, BFC ſunt *Fig. 33.*
extra invicem. Ducatur FAL. Per caſum 1. totus LAC
duplus eſt totius LFC, & ablatus LAB duplus eſt ablati
LFB. Ergo (*e*) & reliquus BAC duplus eſt reliqui BFC. (e) *Per 19. l. 5. quæ ab hac non dependet.*
Quod erat demonſtrandum.

[*Sit LAC gr.* 12, *LAB gr.* 2. (f) *Erunt LFC gr.* 6. *LFB*
gr. 1. *Ergo LAC — LAB = gr.* 12. — 2 = *gr.* 10 = *BAC*; (f) *Per caſ. 1.*
& *LFC — LFB = gr.* 6. — 1 = *gr.* 5. = *BFC. Ergo angulus*
BAC duplus eſt anguli BFC.]

PROPOSITIO XXI.

A*Nguli* (*BQC, BFC,*) *qui in circulo inſiſtunt eidem* *Fig. 34.*
arcui (*BOC,*) *ſive qui in eodem ſegmento* (*BQSC*)
exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.

Sit primo ſegmentum BQSC majus ſemicirculo. Ex *Fig. 34.*
centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad cen-
trum, duplus eſt ſingulorum BQC, BFC. Ergo omnes (g) *Per axio. 6.*
BQC, BFC ſunt (*g*) æquales. Quod erat demonſtrandum.

Sit deinde ſegmentum BQC æquale aut minus ſemicir- *Fig. 35.*
culo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem
I oppoſiti, (*h*) æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & (h) *Per 15. l. 1.*
R ſummæ reliquorum F & O (*i*) æqualis erit. Quare ſi (i) *Per cor. 10 p. 32. l. 1.*
ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui
per primam partem æquales ſunt, utpote eidem arcui QF
inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat
demonſtrandum.

Coroll. *Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubi-* *Fig. 34. vel 35.*
vis in circuli, cujus chorda eſt, circumferentia poſito ejuſdem

magnitudinis apparere; quia ſcilicet ſub angulo æquali BQC ubique apparet.

Fig. 34. [Scholium. *Si ſuper arcu BOC inſiſtant duo æquales anguli, quorum alter BFC ad peripheriam arcui BOC oppoſitam exiſtat: Erit uterque angulus ad eamdem peripheriam ipſi BOC oppoſitam; hoc eſt, angulus ipſi BFC æqualis, neque citra, neque ultra peripheriam cadet. Cadat enim, ſi fieri poteſt, citra peripheriam ad punctum I intra circulum, angulus BIC æqualis angulo BFC ad peripheriam exiſtenti; & producatur IC donec occurrat peripheriæ in Q, & ducatur BQ. Anguli BQC, BFC in eodem ſegmento exiſtentes, per hanc prop. erunt æquales: Sed & BIC, BFC æquales eſſe ſupponuntur; Ergo BIC (externus angulus trianguli BIQ) æqualis eſt uni internorum oppoſitorum, nempe angulo BQI, contra cor. 1. pr. 32. l. 1. Non igitur cadit intra circulum vel citra peripheriam angulus angulo BFC æqualis. Sed neque extra circulum, vel ultra peripheriam: ſi enim extra, ut in E cadere ſupponatur; a puncto Q ubi recta CE peripheriam ſecat, ducatur recta QB: erit ut prius, angulus BQC* (a) *angulo BFC, ac proinde* (b) *angulo BEC æqualis, rurſum contra idem corollarium, cum BQC ſit angulus externus, & BEQ unus internorum oppoſitorum trianguli BQE. Cum igitur angulus ipſi BFC ad peripheriam exiſtenti æqualis, neque cadat ultra peripheriam, neque citra, erit angulus ad peripheriam. Q. E. D.*

(a) *Per hanc prop.* (b) *Per hypoth.*

Fig. 35. *Eodem modo, ſi ſegmentum BQFC ſit ſemicirculo æquale, vel minus, oſtendetur angulum angulo BFC æqualem, neque citra, neque ultra peripheriam BQFC cadere.*]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 36. Q*uadrilateri circulo inſcripti (ABCF) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit (c) duos rectos. Sed O eſt (d) æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui BC; & X (e) eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui AB. Ergo ABC, cum duobus etiam, I, Z, hoc eſt, cum toto oppoſito angulo AFC, facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum. [*Et pari modo oſtendetur angulos oppoſitos BAE, BCF duobus rectis æquales eſſe.*]

(c) *Per 32. l. 1.* (d) *Per 21. l. 3.* (e) *Per eand.*

Coroll. (1.) *Hinc ſi unum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus æqualis angulo quadrilateri oppoſito: internus enim utrivis additus duos rectos angulos* (f) *conficit.*

(f) *Per hanc, 13. l. 1.*

(2.) *Item*

Digitized by Google

(2.) *Item circa Rhombum aut Rhomboidem circulus deſcribi nequit; quia adverſi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

N*On ſunt neceſſariæ: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri.* [Si quis tamen has propoſitiones deſideret, inter corollaria ad prop. ult. lib. 6. eas inveniet.]

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum (ABC) perficere.* *Fig. 37.*

Subtendantur utcumque duæ rectæ AB, CB, quas biſeca in I & L. Ex I & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus ABC.

Nam (*a*) centrum eſt & in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipſis puncto O. *(a) Per cor. p. 1. l. 3.*

Praxis. Centro B ſumpto in arcu, deſcribe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, deſcribe duos alios circulos quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuo occurrentes in O (*b*) dabunt centrum. *Fig. 37.* *(b) Per prax. pr. 10. l. 1. & cor. pr. 1. l. 3.*

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

I*N circulis æqualibus,* [vel in uno eodemque circulo,] *rectæ æquales (CB, FI) ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.* *Fig. 38.*

Pars 1. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, IB. *Rectæ illæ erunt ſibi mutuo (c) æquales, utpote quæ ſint ejuſdem circuli, vel æqualium circulorum radii.*] Quia triangula CAE, FBI ſibi mutuo æquilatera ſunt, etiam erunt ſibi mutuo (*d*) æquiangula. Ergo cum circuli ſibi mutuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, *(c) Per axi. 15* *(d) Per 8. l. 1.*

Digitized by Google

ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cum igitur circuli ſint æquales, etiam arcus FLI neceſſario congruet arcui CQE, & arcus FOI
(a) Per axio. 7. arcui CSE, ac proinde æquales (a) erunt etiam ipſi.

(b) Per axio 8. Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, ſibi mutuo impoſiti (b) congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa FI
(c) Per axio. 7. congruet ſubtenſæ CE. Ergo FI, CE (c) æquales ſunt.

[Coroll. *In circulis æqualibus, vel in eodem, recta inæquales ſubtendunt arcus inæquales, major majorem, minor minorem; & ſi arcus fuerint inæquales, etiam ſubtenſæ inæquales erunt.*]

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig 39. *SI in circulis æqualibus,* [vel in eodem,] *anguli ſive ad centra* (*BAC, FLI*) *ſive ad ambitum* (*BOC, FSI*) *ſint æquales; etiam arcus* (*BXC, FZI*) *quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

(d) Per axio. 15. Pars 1. Quoniam latera AB, AC (d) æquantur LF, LI,
(e) Per 4. l. 1. (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri,) & anguli
(f) Per 26. l. 3. A, L ponuntur æquales; erunt baſes (e) BC, FI æquales.
Ergo arcus BXC, FZI etiam (f) æquales ſunt.

(g) Per 20. l. 3. Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales.
(h) Per axio. 15. Quia igitur (g) horum dupli ſunt BAC, FLI; etiam illi æquales erunt; ac proinde, ut jam oſtenſum, etiam arcus BXC, FZI ſunt æquales.

(i) Per 8. l. 1. Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27.
(K) Per 20. l. 3. æqualitas ſubtenſarum BC, FI. Ergo quia etiam BA, AC (h) æquantur ipſis FL, LI, erunt (i) anguli A & L ad centrum æquales: & quia (k) anguli O & S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

Fig. 40. [Coroll. *Linea recta EF, quæ in A medio puncto peripheriæ alicujus BC circulum tangit, parallela eſt rectæ lineæ BC quæ peripheriam illam ſubtendit. Duc enim e centro D ad contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. In triangulis BDG, CDG, latus DG commune eſt, & DB æquale DC, atque angulus BDA æqualis angulo GDA* (*ob arcus BA, CA æquales.*)
(l) Per 4. l. 1. *Ergo anguli* (l) *DGB, DGC æquales, & proinde recti*
(m) Per 18. l. 3. *ſunt. Sed interni anguli* (m) *GAE, GAF etiam recti ſunt.*
(n) Per 29. l. 1. *Ergo* (n) *BC, EF ſunt parallelæ, Q. E. D.*]

PRO-

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum* (*ABC*) *biſecare*.

Fig. 41.

Duc AC, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc OB, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Jungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per conſtr. æquantur lateribus CO, OB; & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes AB, BC (*a*) æquales. Ergo etiam (*b*) æquantur arcus AB, CB. (a) Per 4. l. 1.

Praxis. Centris A & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F & I, per quæ, ducta recta arcum ABC (*c*) biſecabit. (b) Per 26 l. 3. *Fig.* 41.

[Cor. *Hinc ſequitur, dimidium chordæ arcum quemvis ſubtendentis, eſſe ſemiſſis arcus iſtius ſinum rectum; & vice verſa, ſinum rectum duplicatum, chordam eſſe dupli arcus. Huic omnino ſimile eſt cor.* 1. *p.* 3. *prius, de chorda angulum ad centrum ſubtendente.*] (c) Per *hanc & praxin. pr.* 10. *l.* 1.

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus* (*BCF*) *in ſemicirculo, rectus eſt: in ſegmento majore minor recto; in ſegmento minore recto major.* *Fig.* 42. 43.
[Item angulus mixtilineus ſegmenti majoris eſt major recto, & angulus mixtilineus ſegmenti minoris eſt minor recto.]

Pars 1. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt AB, AC, anguli O, B (*d*) æquales erunt. Ob eamdem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B & F æqualis eſt. Cum igitur (*e*) tres ſimul conficiant duos rectos; ſemiſſis trium, angulus BCF, unus rectus eſt. *Fig.* 42. (d) *Per* 5. *l.* 1. (e) Per 31. *l.* 1.

Pars 2. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor eſt angulo BOL, qui per 1. partem rectus eſt. Ergo &c. *Fig.* 43.

Pars 3. Eſto ſegmentum LOX ſemicirculo I OB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic major quam BOL, qui re- . . . &c *Fig.* 43.

Digitized by Google

Fig. 42. *[Part 4. Sit recta BC communis ſegmentorum inæqualium baſi: Erit angulus mixtilineus ſegmenti majoris BCF, recta BC & arcu CF comprehen,us, angulo recto major. Ducatur enim diamsterBF, & junctaFC, erit angulus rectilineus BCF rectus per primam partem, & preinde angulus mixtilineus BCF, recta BC & arcu CF comprehenſus, erit recto major. Producatur FC ad E, & angulus BCE rectus erit* (a)*, ac pro-*
(a) Per. def. 14. l. 1. *inde angulus mixtilineus BCD ſegmenti minoris erit recto minor. Q. E D.*

Quartam hanc propoſitionis 31. *partem, ejuſque demonſtrationem a Tacqueto omiſſas, ex Euclide reſtituendas duximus.*

Fig. 2. Corollarium (1.) *Hinc Examen Normæ, num exacte rectangula ſit inſtituitur. In circulo enim quocumque, poſito ad circumferentiæ punctum quodcumque Q Normæ vertice, ſi latera per diametri extrema D & E tranſeunt, angulus eſt rectus; Sin minus, haudquaquam.*

Fig. 2. (2.) *[Si norma latera ad puncta D & E continuo adjuncta teneantur, interea dum angulus utrinque circumagatur, Vertexanguli Q deſcribet circumferentiam circuli cujus diameter eſt linea DE.]*

Fig. 42. (3.) *Hinc ab extrema linea perpendicularem excitare diſcimus. Sit BC linea a cujus puncto C perpendicularem oporteat excitare. A puncto quovis A tamquam centro deſcribatur circulus, per punctum C tranſiens; & lineam BC interſecans in puncta B. Ducta diametro BF, & recta CF liquet lineam CF eſſe lineæ BC normalem. Q. E. F.*

[(4.) In Triangulo rectangulo BCF, ſi hypotenuſa BF biſecetur in A, recta AC ſecabit triangulum in duo triangula æquicrura ACB, ACF: Et circulus centro A per B deſcriptus tranſibit per C, anguli recti verticem.

(5.) Cum angulus mixtilineus ſegmenti majoris, ſit angulo
(b) Per part. 4. hujut. *recto rectilineo* (b) *major, angulus autem mixtilineus ſegmenti minoris, ſit angulo recto rectilineo minor; ergo angulus mixtilineus ſemicirculi erit angulo recto rectilineo æqualis: id quod*
(c) Vide cor. 7. p. 16 l. 3. *etiam antea* (c) *ex alio principio demonſtravimus.]*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 44. & 45. SI *recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eumdem ſecet, erit angulus a tangente & ſecante factus, par angulo, qui fit in ſegmento alterno.*

Nimi-

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB. *Fig. 45.*

Tranſeat primo ſecans AB per centrum. Per 18. CAB rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo CAB & L æquales ſunt. *Fig. 44.*

Tranſeat deinde ſecans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in ſemicirculo rectus eſt, faciet BQA cum BAQ (*a*) rectum unum. Sed etiam CAQ rectus (*b*) eſt. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc (*c*) eſt L) æqualis CAB. Quod erat primum.

[a] *Per cor. 6. p. 31. l. 1.* [b] *Per 18. l. 3.* [c] *Per 21. l. 3.*

Deinde (*d*) FAB, CAB faciant duos rectos; & in quadrilatero BOAL, anguli (*e*) oppoſiti L & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB inde L, quos jam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB & O. Quod erat alterum.

[d] *Per 13. l. 1.* [e] *Per 22. l. 3.*

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere, capiens angulum dato parem. *Fig. 46.*

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem (*f*) BCI, cujus latus ſecabit BL in I. Centro I per B deſcribe circulum; hic tranſibit per C, (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera CI, BI (*g*) æqualia ſunt,) capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF.

[f] *Per 23. l. 1.* [g] *Per 6. l. 1.*

Nam quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget (*h*) circulum, quem ſecat BC. Ergo (*i*) angulus in ſegmento BQC æquatur angulo ABF.

[h] *Per 16. l. 3.*

Quod ſi detur angulus obtuſus RBC, eadem conſtrue, eritque ſegmentum COB quæſitum.

[i] *Per præc.*

[Scholium. *Eadem omnino conſtructione, circuli circumferentiam ducere licebit, qui datam rectam AR in dato puncto B tangat, & per aliud punctum C, extra rectam AR ſumptum tranſeat. Nempe ducta BC, & ad datam AR erecta perpendiculari BL, ſi fiat angulus BCI, angulo BCL æqualis; rectarum BL, CI interſectio I erit centrum, & IB vel IC radius circuli deſcribendi.*] *Fig. 46.*

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 47. *A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem.*

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, (*a*) quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet ſegmentum AQC capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

(a) Per 23.l.1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 48. 49. 50. *SI in circulo duæ rectæ (CL, BF) ſe ſecuerint; rectangulum (COL) ſub ſegmentis unius, æquale eſt rectangulo (BOF) ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Fig. 48. Si una CL tranſit per centrum A, & reliquam BF ſecat bifariam; ſecabit quoque(*b*) perpendiculariter, ac propter biſectionem quad. FO eſt rectangulum FOB. Ducatur AF Quoniam CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

(b) Per 3.l.3.

(rectang. COL æ. (*c*) quad. AL; hoc eſt,
quad. AO

quad. AF; hoſt eſt, (*d*)
quad. AO
quad. FO)

Dempto igitur communi quadrato AO, erit
rect. COL æ. quad. FO, hoc eſt,
rect. FOB.

(c) Per 5.l.2.
(d) Per 47.l.1.

Fig. 49. Si una CL per centrum tranſit, & reliquam BF ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam BF in I bifariam. Igitur angulus AIB (*e*) rectus erit. Jam quia CL biſecta eſt in A & aliter in O, erit

(e) Per 3.l.3.

(rectang. COL æ. (*f*) quad. AL, hoc eſt,
cum
quad. AO.

(f) Per 5.l.2.

quad. AB; hoc eſt, (*g*)
quad. AI
quad. BI.)

(g) Per 47.l.1.

Sed

Sed quadratum AO æquatur (*a*) quadratis OI, & I. Ergo (a) *Per 47. l. 1.*
(rectang. COL Æ. quad. AI)
(quad. OI quad. BI.)
(quad. AI
Dempto igitur communi quadrato AI, remanent
(rect. COL Æ. quad. BI.
(quad. OI

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (*b*) FOB (b) *Per 5. l. 2.*
cum quadrato OI, quia FB ſecta eſt bifariam in & I aliter in
O, Ergo.
(rectang. COL Æ. rect. FOB)
(quad. OI quad. OI)
Dempto igitur communi quadrato OI, erit
rect. COL Æ. rect. FOB.

Quod ſi neutra rectarum CL, FB per centrum tranſeat, *Fig. 50.*
per communem earum ſectionem O & per centrum A, ducatur recta XZ. Per modo demonſtrata tam rectang. COL quam rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia ſunt inter ſe.

[*Vel ſic facilius & univerſalius. Connecte CF & BL. Atque ob angulos* (c) *COF, BOL ad verticem oppoſitos, ipſoſque* (d) *C & B (ſuper eodem arcu FL) pares, trigona COF, BOL* (e) *æquiangula ſunt. Ergo per prop. 4. lib. 6. quæ ab hac non dependet, CO : OF :: BO : OL; & proinde, per prop. 16. lib. 6. quæ itidem ab hac minime dependet, rect. CO × OL = rect. BO × OF. Q. E. D.*]

Fig. 51. (c) *Per 15 l. 1.* (d) *Per 21 l. 3.* (e) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*

PROPOSITIO XXXVI.

SI *a puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF,) altera ſecans (BC ;) erit rectangulum (CBO) ſub tota ſecante (CB) & parte (BO) inter punctum & circulum interjecta comprehenſum, æquale quadrato tangentis (BF.)* *Fig. 52. 53. 54.*

Si ſecans BC tranſit per centrum A, junge AF: faciet hæc (*f*) cum FB angulum rectum. Quoniam CO biſecta eſt in A, eique adjecta OB, erit
(rect. CBO (*g*) Æ. quad. AB; hoc eſt, (*h*)
(quad. AO
quad. BF)
quad. AF)

Fig. 51. (f) *Per 18. l. 3.* (g) *Per 6. l. 2.* (h) *Per 47. l. 1.*

Ablatis

Digitized by Google

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet
rect. CBO Æ. quad. B.F.

Fig. 53. 54. Quod ſi CB non tranſit per centrum A, ducantur AB, AF, AO; & AL ex centro ducta biſecet OC in L. Ergo angulus ALO (*a*) rectus erit. Item AFB (*b*) erit rectus. Quoniam vero CO biſecta eſt in L, eique adjecta eſt OB, erit

a) Per 3. l. 3. (b) Per 18 l. 3. (c) Per 6. l. 2.

(rect. CBO Æ. (*c*) quad. LB.
quad. LO)

Addatur utrimque quadratum AL, erit

(rect. CBO Æ. quad. LB)
quad. LO quad. AL
quad. AL

(d) Per 47. l. 1. (e) Per eamd. (f) Per eamd.

Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato (*d*) AO ſeu AF; & quadrata LB, AL (*e*) æquantur quadrato AB. Ergo

(rect. CBO Æ. quad. AB; hoc eſt. (*f*)
quad AF

quad. BF)
quad. AF.)

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet
rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 55. (g) Per 32. l. 3. (h) Per cor 6 p. 32. l. 1.

[*Vel ſic facilius & univerſalius. Duc CF & FO: ac ob angulos BFO & (g) C pares, & B communem, triangula CBF, FBO (h) æquiangula ſunt. Ergo per 4. l. 6. quæ ab hanc non dependet, CB : BF :: FB : BO. Quare per 17. l. 6. quæ ab hac non dependet, rectangulum CB X.BO æquale eſt quadrato BF. Q.E.D.*

Corollaria.

Fig. 56. 1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur ſecantes BC, omnia rectangula CBO inter ſe æqualia ſunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, BF, BQ æquales ſunt. Earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo CBO.

[3. *Perſpicuum quoque eſt ab eodem puncto B extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas BF, BQ, quæ circulum tangant. Nam ſi tertia tangere dicatur, erit illa ipſis BF & BQ (i) æqualis, & proinde ab una iſtarum non diverſa.*

(i) Per cor. 2.

Fig. 57. 4. *Hinc cum Maurolyco ex nota montis altitudine AD, & linea horizontali AB terram tangente in B, ubi montis vertex, ab illo recedentibus apparere deſinit, Telluris diametrum DE (in AD producta ſumptam) metiri diſcimus. Erit enim, per hanc prop. rectang. AE X AD = ABq. Dividatur ergo notum*

Digitized by Google

ium quadratum AB per notam montis altitudinem AD, & quotiens dabit rectam AE: ex qua ſubtrahe notam montis altitudinem AD; reliqua erit DE Telluris diameter. Q.E.I.

5. *In omni triangulo rectangulo BFA, rectangulum ex hypotenuſa & lateris unius ſumma, ac differentia, æquatur quadrato lateris alterius. Si enim centro A, & intervallo AF deſcribatur circulus, ſecans hypotenuſam AB in O, & producatur BA uſque dum circulo rurſus occurrat in C, Hypotenuſa BA & lateris AF ſumma erit BC, a puncto B circulum ſecans; eorumque differentia erit BO ea ſecantis pars qua inter punctum & circulum interjicitur; & trianguli latus alterum eſt BF circulum* (a) *tangens. Sed per hanc prop. rectangulum CBO æquatur quadrato BF; Ergo, in triangulo rectangulo BFA, &c. Q. E. D.* Fig. 52. (a) Per 16. l. 3.

6. *Si ab angulo A trianguli ABC, cujus latera AB, AC ſunt inæqualia, demittatur in baſim (ſi opus productam) perpendiculum AL, erit rectangulum ſub ſumma & differentia laterum AB, AC, æquale rectangulo ſub ſumma & differentia rectarum LB, LC, inter perpendiculum AL & angulos baſis B, C interceptarum. Centro enim A, radio latere minore AC deſcribatur circulus ſecans latus majus AB in D, & baſim (ſi opus productam) in O; & producatur BA donec circulo iterum occurrat in E. Propter æquales AC, AD, AE, erit EB laterum ſumma; & BD illorum differentia: & propter æquales* (b) *LC, LO, erunt BC & BO (vel in Fig. 59. BO & BC) ſumma & differentia interceptarum LB, LC. Sed* (c) *rect. EBD = rect. CBO. Ergo, &c.* Fig. 58. 59. (b) Per 3. l. 3. (c) Per cor. 1. hujus.

In caſu fig. 58. Theorema ſic poteſt efferri. Fig. 58.

Si ab angulo A trianguli ABC demittatur perpendicularis in baſim BC, eam dividens in duo ſegmenta BL, LC; erit rectangulum ſub ſumma & differentia laterum AB, AC, æquale rectangulo ſub baſi BC, & differentia ſegmentorum baſis BO. Atque hujus theorematis uſus eſt eximius in trigonometria plana.]

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum ſub CB & OB ſit æquale quadrato BF, hæc circulum tanget in F. Fig. 56.

[*Hoc eſt, ſi a puncto B extra circulum dato, in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera BC circulum ſecet, altera vero BF incidat, ſi autem rectangulum ſub tota ſecante CB & parte BO inter punctum & circulum interjecta comprehenſum, æquale ei quod ab incidente BF ſit quadrato; Incidens linea BF circulum tanget in F.*]

Ex

Digitized by Google

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter ſe æqualia ſunt; adeoque & (*a*) rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo (*b*) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (*c*) rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo BF (*d*) tangit.

[Coroll. 1. *Hinc angulus* (e) *EBF æqualis eſt angulo EBQ.*

2 *Si duæ rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum tangat, altera quoque BQ eumdem circulum tanget. Nam cum BF, BQ ſint æquales, earum quadrata erunt* (f) *æqualia. Sed BFq* = (g) *CBO. Ergo BQq* = (h) *CBO. Ergo etiam BQ per hanc prop. tangit circulum.*]

(a) *Per axio.* 15.
(b) *Per* 8. *l.* 1.
(c) *Per* 18. *l.* 3.
(d) *Per* 16. *l.* 3.
(e) *Per* 8. *l.* 1.
(f) *Per axio.* 13.
(g) *Per præc.*
(h) *Per axio.* 1.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER QUARTUS.

HIC liber totus problematicus eſt: docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur & conſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus extruendis: & ex illo quaſi fonte eximiæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxere.

Eſt vero Quartus *hic Elementorum liber* Trigonometriæ *utiliſſimus. Circulo enim polygona inſcribendo, tabulas Chordarum, Tangentium, & Secantium fabricare diſcimus: quarum ope, figurarum & corporum magnitudines menſuramur: Neque abſque eo ſtellarum* Aſpectus, *quos vocant, Quartilem, nempe, Sextilem, &c. rite diſtinguimus: utpote a polygonorum in circulo inſcriptione omnino pendentes. Neque ſane Circuli aream ſive* quadraturam *quamdam aliunde quam ex polygonorum innumerorum circulo inſcriptorum & circumſcriptorum areis ſive* quadraturis *colligere poſſumus. Et haud aliter circulorum ad ſe invicem rationem duplicatam, e duplicata polygonorum iiſdem inſcriptorum aut circumſcriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inſcriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus ſcientiis, huic libro in ſolidum fere deberi videatur.*

DEFINITIO.

1. FIgura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus, cum ſingulorum angulorum vertices in circumferentia exiſtunt.

2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cum ſingula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata ſeu regularis eſt, quæ æquilatera & æquiangula eſt.

PRO-

Scholium.

Fig. 18. EX 31. ſeq. pulchre ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)

Centrum A & datum punctum O jungens recta biſecetur in P. Tum centro P, per A & O deſcribe circulum occurrentem dato in B. Recta OB tanget.

Nam juncta AB, angulus ABO in ſemicirculo rectus eſt, per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 29. *SI circulum tangat recta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta AF: (*a*) ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit (*b*) ABF acutus. Ergo AB, (hoc eſt AO) major (*c*) quam AF, pars toto.

(a) *Per 1. part. p. 16. l. 1.*
(b) *Per cor. 5. p. 32. lib. 1.*
(c) *Per 19. l. 1.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 30. *SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI,) erit in ea centrum.*

Si negas, ſit centrum extra AI in Z, & ab eo ad contactum ducatur ZA. Erit (*d*) angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. recto; hoc eſt, pars toti.

(d) *Per prat.*

PROPOSITIO XX.

Fig. 31. 32. 33. *ANgulus ad centrum (BAC) duplus eſt anguli (BCF) ad peripheriam, cum idem arcus (BC) eſt baſis angulorum.*

Fig. 31. Triplex eſt caſus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum vero quia AF, AC ex centro ductæ æquantur, ducta FC, erunt in triangulo Z anguli F & C (*e*) æquales. Sed

(e) *Per 5. lib. 1.*

Digitized by Google

Sed BAC (*a*) æqualis eſt duobus F & C. Ergo BAC duplus eſt unius F.

(a) *Per 32. l. 1.*

In caſu ſecundo BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum vero ducta FAX, per caſum primum XAB eſt duplus XFB, & XAC duplus XFC. (*b*) Ergo totus BAC duplus eſt totius BFC.

Fig. 32.

(b) *Per 12. l. 5. quæ ab hanc non dependet.*

[*Sit XAB angulus graduum 6:* (c) *erit angulus XFB graduum 3. Sit porro ang. XAC. gr. 4:* (d) *erit XFC gr. 2. Ergo XAB + XAC erit gr. 6. + 4 = gr. 10 = BAC; & XFB + XFC gr. 3. + 2 = gr. 5. = BFC. Denarius autem graduum numerus eſt quinarii duplus: ergo & angulus BAC duplus eſt anguli BFC.*]

(c) *Per caſ. 1.*

(d) *Per eund.*

In tertio caſu BF ſecat AC, & anguli BAC, BFC ſunt extra invicem. Ducatur FAL. Per caſum 1. totus LAC duplus eſt totius LFC, & ablatus LAB duplus eſt ablati LFB. Ergo (*e*) & reliquus BAC duplus eſt reliqui BFC. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 33.

(e) *Per 19. l. 5. quæ ab hac non dependet.*

[*Sit LAC gr. 12, LAB gr. 2.* (f) *Erunt LFC gr. 6. LFB gr. 1. Ergo LAC — LAB = gr. 12. — 2 = gr. 10. = BAC; & LFC — LFB = gr. 6. — 1 = gr. 5. = BFC. Ergo angulus BAC duplus eſt anguli BFC.*]

(f) *Per caſ. 1.*

PROPOSITIO XXI.

Anguli (BQC, BFC,) qui in circulo inſiſtunt eidem arcui (BOC,) ſive qui in eodem ſegmento (BQSC) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.

Fig. 34.

Sit primo ſegmentum BQSC majus ſemicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus eſt ſingulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC ſunt (*g*) æquales. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 34.

(g) *Per axio. 6.*

Sit deinde ſegmentum BQC æquale aut minus ſemicirculo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem I oppoſiti, (*h*) æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & R ſummæ reliquorum F & O (*i*) æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales ſunt, utpote eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 35.

(h) *Per 15. l. 1.*

(i) *Per cor. 10 p. 32. l. 1.*

Coroll. *Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubivis in circuli, cujus chorda eſt, circumferentia poſito ejuſdem*

Fig. 34. vel 35.

Digitized by Google

magnitudinis apparere ; quia ſcilicet ſub angulo æquali BQC ubique apparet .

Fig. 34. [Scholium. *Si ſuper arcu BOC inſiſtant duo æquales anguli , quorum alter BFC ad peripheriam arcui BOC oppoſitam exiſtat: Erit uterque angulus ad eamdem peripheriam ipſi BOC oppoſitam ; hoc eſt , angulus ipſi BFC æqualis , neque citra , neque ultra peripheriam cadet . Cadat enim , ſi fieri poteſt , citra peripheriam ad punctum I intra circulum , angulus BIC æqualis angulo BFC ad peripheriam exiſtenti ; & producatur IC donec occurrat peripheriæ in Q , & ducatur B Q . Anguli BQC, BFC in eodem ſegmento exiſtentes, per hanc prop. erunt æquales : Sed & BIC, BFC æquales eſſe ſupponuntur ; Ergo BIC (externus angulus trianguli BIQ) æqualis eſt uni internorum oppoſitorum , nempe angulo BQI , contra cor. 1. pr. 32 l. 1. Non igitur cadit intra circulum vel citra peripheriam angulus angulo BFC æqualis . Sed neque extra circulum , vel ultra peripheriam : ſi enim extra , ut in E cadere ſupponatur ; a puncto Q ubi recta CE peripheriam ſecat, ducatur recta QB : erit ut prius , angulus BQC (a) angulo BFC , ac proinde (b) angulo BEC æqualis , rurſum contra idem corollarium , cum BQC ſit angulus externus , & BEQ unus internorum oppoſiterum trianguli B Q E . Cum igitur angulus ipſi BFC ad peripheriam exiſtenti æqualis , neque cadat ultra peripheriam, neque citra, erit angulus ad peripheriam . Q. E. D.*

(a) Per hanc prop.
(b) Per hypoth.

Fig. 35. *Eodem modo , ſi ſegmentum BQFC ſit ſemicirculo æquale , vel minus , oſtendetur angulum angulo BFC æqualem , neque citra , neque ultra peripheriam BQFC cadere .*]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 36.

QUadrilateri circulo inſcripti (ABCF) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt .

Ducantur BF , CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit (*c*) duos rectos . Sed O eſt (*d*) æqualis I , quia inſiſtunt eidem arcui BC ; & X (*e*) eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui AB . Ergo ABC , cum duobus etiam, I , Z , hoc eſt , cum toto oppoſito angulo AFC, facit duos rectos . Quod erat demonſtrandum . [*Et pari modo oſtendetur angulos oppoſitos BAF , BCF duobus rectis æquales eſſe .*]

(c) Per 32. l. 1.
(d) Per 21. l. 3.
(e) Per eand.

Coroll. (1.) *Hinc ſi unum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur , erit angulus externus æqualis angulo quadrilateri oppoſito : internus enim utrivis additus duos rectos angulos (f) conficit .*

(f) Per hanc, & 13. l. 1.

(2.) *Item*

(2.) *Item circa Rhombum aut Rhomboidem circulus deſcribi nequit; quia adverſi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

N*On ſunt neceſſariæ: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus recte definiri.* [Si quis tamen has propoſitiones deſideret, inter corollaria ad prop. ult. lib. 6. eas inveniet.]

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum (ABC) perficere.* *Fig. 37.*

Subtendantur utcumque duæ rectæ AB, CB, quas biſeca in I & L. Ex I & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus ABC.

Nam (*a*) centrum eſt & in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipſis puncto O. *(a) Per cor. p. 1. l. 3.*

Praxis. Centro B ſumpto in arcu, deſcribe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, deſcribe duos alios circulos quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuo occurrentes in O (*b*) dabunt centrum. *Fig. 37.* *(b) Per prax. pr. 10. l. 1. & cor. pr. 1. l. 3.*

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

I*N circulis æqualibus,* [vel in uno eodemque circulo,] *rectæ æquales (CE, FI) ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.* *Fig. 38.*

Pars 1. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, IB. *Rectæ illæ erunt ſibi mutuo* (c) *æquales, utpote quæ ſint ejuſdem circuli, vel æqualium circulorum radii.*] Quia triangula CAE, FBI ſibi mutuo æquilatera ſunt, etiam erunt ſibi mutuo (*d*) æquiangula. Ergo cum circuli ſibi mutuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, *(c) Per axi. 15* *(d) Per 8. l. 1.*

ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cum igitur circuli ſint æquales, etiam arcus FLI neceſſario congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui CSE, ac proinde æquales (*a*) erunt etiam ipſi.

(a) Per axio. 7.
(b) Per axio 8.
(c) Per axio. 7.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, ſibi mutuo impoſiti (*b*) congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa FI congruet ſubtenſæ CE. Ergo FI, CE (*c*) æquales ſunt.

[Coroll. *In circulis æqualibus, vel in eodem, rectæ inæquales ſubtendunt arcus inæquales, major majorem, minor minorem; & ſi arcus fuerint inæquales, etiam ſubtenſæ inæquales erunt.*]

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 39.

SI in circulis æqualibus, [vel in eodem,] *anguli ſive ad centra* (*BAC, FLI*) *ſive ad ambitum* (*BOC, FSI*) *ſint æquales; etiam arcus* (*BXC, FZI*) *quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

(d) Per axio. 15.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per 26. l. 3.
(g) Per 20. l. 3.
(h) Per axio. 15.
(i) Per 8. l. 1.
(K) Per 20. l. 3.

Pars 1. Quoniam latera AB, AC (*d*) æquantur LF, LI, (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri,) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt baſes *e*) BC, FI æquales. Ergo arcus BXC, FZI etiam (*f*) æquales ſunt.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales. Quia igitur (*g*) horum dupli ſunt BAC, FLI; etiam illi æquales erunt; ac proinde, ut jam oſtenſum, etiam arcus BXC, FZI ſunt æquales.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum BC, FI. Ergo quia etiam BA, AC (*h*) æquantur ipſis FL, LI, erunt (*i*) anguli A & L ad centrum æquales: & quia (k) anguli O & S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

Fig. 40.

(l) Per 8. l. 1.
(m) Per 18. l. 3.
(n) Per 29. l. 1.

[Coroll. *Linea recta EF, quæ in A medio puncto peripheriæ alicujus BC circulum tangit, parallela eſt rectæ lineæ BC quæ peripheriam illam ſubtendit. Duc enim e centro D ad contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. In triangulis BDG, CDG, latus DG commune eſt, & DB æquale DC, atque angulus BDA æqualis angulo GDA* (*ob arcus BA, CA æquales.*) *Ergo anguli* (l) *DGB, DGC æquales, & proinde recti ſunt. Sed interni anguli* (m) *GAE, GAF etiam recti ſunt. Ergo* (n) *BC, EF ſunt parallelæ. Q. E. D.*]

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum* (*ABC*) *biſecare.*

Fig. 41.

Duc AC, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc OB, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Junguntur enim AB, CB. Latera AO, OB per conſtr. æquantur lateribus CO, OB; & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes AB, BC (*a*) æquales. Ergo etiam (*b*) æquantur arcus AB, CB.

Praxis. Centris A & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F & I, per quæ, ducta recta arcum ABC (*c*) biſecabit.

[Cor. *Hinc ſequitur, dimidium chordæ arcum quemvis ſubtendentis, eſſe ſemiſſis arcus iſtius ſinum rectum; & vice verſa, ſinum rectum duplicatum, chordam eſſe dupli arcus. Huic omnino ſimile eſt cor.* 1.*p.*3. *prius, de chorda angulum ad centrum ſubtendente.*]

(a) Per 4. *l.* 1.
(b) Per 26 *l.* 3.
Fig. 41.
(c) Per hanc & praxin. pr. 10. *l.* 1.

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus* (*BCF*) *in ſemicirculo, rectus eſt: in ſegmento majore minor recto; in ſegmento minore recto major.* *Fig.* 42.43.
[Item angulus mixtilineus ſegmenti majoris eſt major recto, & angulus mixtilineus ſegmenti minoris eſt minor recto.]

Pars 1. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt AB, AC, anguli O, B (*d*) æquales erunt. Ob eamdem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B & F æqualis eſt. Cum igitur (*e*) tres ſimul conficiant duos rectos; ſemiſſis trium, angulus BCF, unus rectus eſt.

Pars 2. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor eſt angulo BOL, qui per 1. partem rectus eſt. Ergo &c.

Pars 3. Eſto ſegmentum LOX ſemicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic major quam BOL, qui re- . . . &c

Fig. 42.
(d) Per 5. *l.* 1.
(e) Per 32. *l.* 1.
Fig. 43.
Fig. 43.

Digitized by Google

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB. *Fig.* 45.

Tranſeat primo ſecans AB per centrum. Per 18. CAB rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo CAB & L æquales ſunt. *Fig.* 44.

Tranſeat deinde ſecans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in ſemicirculo rectus eſt, faciet BQA cum BAQ (*a*) rectum unum. Sed etiam CAQ rectus (*b*) eſt. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc (*c*) eſt L) æqualis CAB. Quod erat primum.

Deinde (*d*) FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL, anguli (*e*) oppoſiti L & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB inde L, quos jam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB & O. Quod erat alterum.

[a] *Per cor. 6. p. 31. l. 1.*
[b] *Per 18. l. 3.*
[c] *Per 21. l. 3.*
[d] *Per 13. l. 1.*
[e] *Per 22. l. 3.*

PROPOSITIO XXXIII.

S*uper data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere, capiens angulum dato parem.* *Fig.* 46.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem (*f*) BCI, cujus latus ſecabit BL in I. Centro I per B deſcribe circulum; hic tranſibit per C, (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera CI, BI (*g*) æqualia ſunt,) capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF.

[f] *Per 23. l. 1.*
[g] *Per 6. l. 1.*

Nam quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget (*h*) circulum, quem ſecat BC. Ergo (*i*) angulus in ſegmento BQC æquatur angulo ABF.

Quod ſi detur angulus obtuſus RBC, eadem conſtrue, eritque ſegmentum COB quæſitum.

[h] *Per 16. l. 3.*
[i] *Per præc.*

[Scholium. *Eadem omnino conſtructione, circuli circumferentiam ducere licebit, qui datam rectam AR in dato puncto B tangat, & per aliud punctum C, extra rectam AR ſumptum tranſeat. Nempe ducta BC, & ad datam AR erecta perpendiculari BL, ſi fiat angulus BCI, angulo BCL æqualis; rectarum BL, CI interſectio I erit centrum, & IB vel IC radius circuli deſcribendi.*] *Fig.* 46.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 47. **A** *Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem.*

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, (*a*) quæ faciat angulum BAC parem dato.
(a) Per 23.l.1. Hæc auferet ſegmentum AQC capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 48. 49. 50. **S** *I in circulo duæ rectæ (CL, BF) ſe ſecuerint; rectangulum (COL) ſub ſegmentis unius, æquale eſt rectangulo (BOF) ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Fig. 48. Si una CL tranſit per centrum A, & reliquam BF ſecat
(b) Per 3.l.3. biſariam; ſecabit quoque(*b*) perpendiculariter, ac propter biſectionem quad. FO eſt rectangulum FOB. Ducatur AF Quoniam CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

(c) Per 5.l.2. (rectang. COL Æ. (*c*) quad. AL; hoc eſt,
quad. AO

(d) Per 47.l.1. quad. AF; hoc eſt, (*d*)
quad. AO)
quad. FO)

Dempto igitur communi quadrato AO, erit
rect. COL Æ. quad. FO, hoc eſt,
rect. FOB.

Fig. 49. Si una CL per centrum tranſit, & reliquam BF ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam BF in
(e) Per 3.l.3. I biſariam. Igitur angulus AIB (*e*) rectus erit. Jam quia CL biſecta eſt in A & aliter in O, erit

(f) Per 5.l.2. (rectang. COL Æ. (*f*) quad. AL, hoc eſt,
cum
quad. AO.

(g) Per 47.l.1. quad. AB; hoc eſt, (*g*)
quad. AI)
quad. BI.)

Sed

Sed quadratum AO æquatur (*a*) quadratis OI, IA. Ergo (a) Per 47. l. 1.

(rectang. COL Æ. quad. AI)
(quad. OI quad. BI.)
(quad. AI

Dempto igitur communi quadrato AI, remanent

(rect. COL Æ. quad. BI.
(quad. OI

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (*b*) FOB cum quadrato OI, quia FB ſecta eſt bifariam in & I aliter in O, Ergo. (b) Per 5. l. 2.

(rectang. COL Æ. rect. FOB)
(quad. OI quad. OI)

Dempto igitur communi quadrato OI, erit

rect. COL Æ. rect. FOB.

Quod ſi neutra rectarum CL, FB per centrum tranſeat, per communem earum ſectionem O & per centrum A, ducatur recta XZ. Per modo demonſtrata tam rectang. COL quam rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia ſunt inter ſe. *Fig. 50.*

[*Vel ſic facilius & univerſalius. Connecte CF & BL. Atque ob angulos* (c) *COF, BOL ad verticem oppoſitos, ipſoſque* (d) *C & B* (*ſuper eodem arcu FL*) *pares, trigona COF, BOL* (e) *æquiangula ſunt. Ergo per prop. 4. lib. 6. quæ ab hac non dependet, CO : OF :: BO : OL ; & proinde, per prop. 16. lib. 6. quæ itidem ab hac minime dependet, rect. CO × OL = rect. BO × OF. Q. E. D.*] *Fig. 51.* (c) *Per 15 l. 1.* (d) *Per 21 l. 3.* (e) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*

PROPOSITIO XXXVI.

SI a puncto (*B*) *extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens* (*BF,*) *altera ſecans* (*BC ;*) *erit rectangulum* (*CBO*) *ſub tota ſecante* (*CB*) *& parte* (*BO*) *inter punctum & circulum interjecta comprehenſum, æquale quadrato tangentis* (*BF.*) *Fig. 52. 53. 54.*

Si ſecans BC tranſit per centrum A, junge AF: faciet hæc (*f*) cum FB angulum rectum. Quoniam CO biſecta eſt in A, eique adjecta OB, erit *Fig. 52.* (f) *Per 18. l. 3.*

(rect. CBO (*g*) Æ. quad. AB ; hoc eſt, (*h*) (g) *Per 6. l. 2.*
(quad. AO (h) *Per 47. l. 1.*

quad. BF)
quad. AF)

Ablatis

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet

rect. CBO Æ. quad. B.F.

Fig. 53. 54. Quod ſi CB non tranſit per centrum A, ducantur AB, AF, AO; & AL ex centro ducta biſecet OC in L. Ergo angulus ALO (*a*) rectus erit. Item AFB (*b*) erit rectus. Quoniam vero CO biſecta eſt in L, eique adjecta eſt OB, erit

a) Per 3. l. 3.
(b) Per 18. l. 3.
(c) Per 6. l. 2.

(rect. CBO / quad. LO) Æ. (*c*) quad. LB.

Addatur utrimque quadratum AL, erit

(rect. CBO / quad. LO / quad. AL) Æ. (quad. LB / quad. AL)

(d) Per 47. l. 1.
(e) Per eamd.
(f) Per eamd.

Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato (*d*) AO ſeu AF; & quadrata LB, AL (*e*) æquantur quadrato AB. Ergo

(rect. CBO / quad AF) Æ. quad. AB; hoc eſt. (*f*) (quad. BF / quad. AF.)

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet

rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 55.
(g) Per 32. l. 3.
(h) Per cor 6 p. 32. l. 1

[*Vel ſic facilius & univerſalius. Duc CF & FO: ac ob angulos BFO &* (g) *C pares, & B communem, triangula CBF, FBO* (h) *æquiangula ſunt. Ergo per 4. l. 6. quæ ab hanc non dependet, CB : BF :: FB : BO. Quare per 17. l. 6. quæ ab hac non dependet, rectangulum CB X. BO æquale eſt quadrato BF. Q.E.D.*

Corollaria.

Fig. 56. 1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur ſecantes BC, omnia rectangula CBO inter ſe æqualia ſunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, BF, BQ æquales ſunt. Earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo CBO.

[3. *Perſpicuum quoque eſt ab eodem puncto B extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas BF, BQ, quæ circulum tangant. Nam ſi tertia tangere dicatur, erit illa ipſis BF & BQ* (i) *æqualis, & proinde ab una iſtarum non diverſa.*

(i) Per cor. 2.

Fig. 57. 4. *Hinc cum Maurolyco ex nota montis altitudine AD, & linea horizontali AB terram tangente in B, ubi montis vertex, ab illo recedentibus apparere definit, Telluris diametrum DE (in AD producta ſumptam) metiri diſcimus. Erit enim, per hanc prop. rectang. AE X AD = ABq. Dividatur ergo notum*

Digitized by Google

ium quadratum AB per notam moutis altitudinem AD, & quotieus dabit rectam AE: ex qua ſubtrahe notam moutis altitudinem AD; reliqua erit DE Telluris diameter. Q.E.I.

5. *In omni triangulo rectangulo BFA, rectangulum ex by-* Fig. 52.
potenuſa & lateris uuius ſumma, ac differeutia, æquatur qua-
drato lateris alterius. Si enim centro A, & intervallo AF
deſcribatur circulus, ſecans bypotenuſam AB in O, & produ-
catur BA uſque dum circulo rurſus occurrat in C, Hypotenuſa
BA & lateris AF ſumma erit BC, a puncto B circulum ſe-
cans; eorumque differentia erit BO ea ſecantis pars quæ inter
punctum & circulum interjicitur; & trianguli latus alterum
eſt BF circulum (a) *taugens. Sed per banc prop. rectaugulum* (a) Per 16.
CBO æquatur quadrato BF: Ergo, in triangulo rectangulo l. 3.
BFA, &c. Q. E. D.

6. *Si ab augulo A trianguli ABC, cujus latera AB, AC* Fig. 58. 59.
ſunt inæqualia, demittatur in baſim (ſi opus productam) per-
pendiculum AL, erit rectangulum ſub ſumma & differeutia
laterum AB, AC, æquale rectangulo ſub ſumma & differen-
tia rectarum LB, LC, inter perpendiculum AL & augulos baſis
B, C iuterceptarum. Centro euim A, radio latere minore AC
deſcribatur circulus ſecans latus majus AB iu D, & baſim
(ſi opus productam) in O; & producatur BA donec circulo
iterum occurrat in E. Propter æquales AC, AD, AE, erit
EB laterum ſumma; & BD illorum differentia: & propter
æquales (b) *LC, LO, eruut BC & BO (vel in Fig. 59. BO*
& BC) ſumma & differentia interceptarum LB, LC. Sed (b) Per 3. l. 3.
(c) *rect. EBD = rect. CBO. Ergo, &c.* (c) Per cor. 1. hujus.
Iu caſu fig. 58. Theorema ſic poteſt efferri. Fig. 58.
Si ab angulo A trianguli ABC demittatur perpendicularis
in baſim BC, eam dividens in duo ſegmenta BL, LC; erit
rectangulum ſub ſumma & differeutia laterum AB, AC, æ-
quale rectangulo ſub baſi BC, & differentia ſegmentorum baſis
BO. Atque bujus theorematis uſus eſt eximius in trigonome-
tria plana.]

PROPOSITIO XXXVII.

SI *rectangulum ſub CB & OB ſit æquale quadrato BF, bæc* Fig. 56.
circulum tauget in F.

[*Hoc eſt, ſi a puncto B extra circulum dato, in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera BC circulum ſecet, altera vero BF iucidat, ſi autem rectangulum ſub tota ſecante CB & parte BO inter punctum & circulum interjecta comprebenſum, æquale ei quod ab incidente BF ſit quadrato; Incidens linea BF circulum tanget in F.*]

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter ſe æqualia ſunt; adeoque & (*a*) rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo (*b*) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (*c*) rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo BF (*d*) tangit.

(a) Per axio. 15.
(b) Per 8. l. 1.
(c) Per 18. l. 3.
(d) Per 16. l. 3.
(e) Per 8. l. 1.
(f) Per axio. 13.
(g) Per pr ec.
(h) Per axio, 1.

[Coroll. 1. *Hinc angulus* (e) *EBF æqualis eſt angulo EBQ.*

2 *Si duæ rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum tangat, altera quoque BQ eumdem circulum tanget. Nam cum BF, BQ ſint æquales, earum quadrata erunt* (f) *æqualia. Sed BFq* = (g) *CBO. Ergo BQq* = (h) *CBO. Ergo etiam BQ per hanc prop. tangit circulum.*]

Digitized by Google

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER QUARTUS.

HIC liber totus problematicus eſt : docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur & conſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus extruendis : & ex illo quaſi fonte eximiæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxere.

Eſt vero Quartus *hic Elementorum liber* Trigonometriæ *utiliſſimus. Circulo enim polygona inſcribendo, tabulas Chordarum, Tangentium, & Secantium fabricare diſcimus: quarum ope, figurarum & corporum magnitudines menſuramur: Neque abſque eo ſtellarum* Aſpectus, *quos vocant, Quartilem, nempe, Sextilem, &c. rite diſtinguimus: utpote a polygonorum in circulo inſcriptione omnino pendentes. Neque ſane Circuli aream ſive* quadraturam *quamdam aliunde quam ex polygonorum innumerorum circulo inſcriptorum & circumſcriptorum areis ſive* quadraturis *colligere poſſumus. Et haud aliter circulorum ad ſe invicem rationem duplicatam, e duplicata polygonorum iiſdem inſcriptorum aut circumſcriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inſcriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus ſcientiis, huic libro in ſolidum fere deberi videatur.*

DEFINITIO.

1. Figura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus, cum ſingulorum angulorum vertices in circumferentia exiſtunt.

2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cum ſingula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata ſeu regularis eſt, quæ æquilatera & æquiangula eſt.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 4.

CIrculo (B D) *rectam datam* (*A*) *diametro non majorem, inſcribere.*

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B, intervallo datæ A, deſcribe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam BC. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

CIrculo *triangulum inſcribere dato* (X) *æquiangulum.*

Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par (*a*) angulo C, & FDH par B; jungaturque GH. Dico factum. Nam angulus H æquatur (*b*) angulo EDG, hoc eſt, (*c*) angulo C; & G æquatur FDH, hoc eſt, ipſi B. Ergo etiam GDH (*d*) æquatur A. Factum eſt igitur quod petebatur.

(a) *Per* 23. *l.* 1.
(b) *Per* 33. *l.* 5.
(c) *Per conſtr.*
(d *Per cor.* 9. *p.* 32. *l.* 1.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

CIrculo *circumſcribere triangulum æquiangulum dato* ILK.

Latus IK utrimque producatur, ut fiant externi anguli O & N. Fac in centro A (per 23. l. 1.) angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F, circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE eſt circulo circumſcriptum, & æquiangulum dato ILK.

In quadrilatero CGAB, anguli G & B ſunt duo (*e*) recti. Ergo reliqui GAB & C conficiunt ſimul etiam duos (*f*) rectos, ac proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur GAB & O æqualibus per conſtr. remanent æquales, C & I. Eodem modo oſtenditur E æqualis eſſe K. Ergo D & L (*g*) etiam æquales erunt. Factum eſt igitur quod petebatur.

Quod autem tangentes concurrant, ſic oſtenditur. Anguli O, I, & K, N ſunt æquales (*h*) rectis; & I, K, ſunt

(e) *Per* 18. *l.* 3.
(f) *Per theor.* 1. *ſchol. p.* 32, *l.* 1.
(g) *Per cor.* 9. *p.* 32. *l.* 1.
(h) *Per* 13. *l.* 1.

ſunt minores duobus (*a*) rectis. Ergo O, N, (hoc eſt per conſtruct. GAB & BAF) ſunt majores duobus rectis. Ergo GAF eſt minor duobus (*b*) rectis, Ergo [*arcus* GBF *eſt* (c) *ſemiperipheria major,& arcus oppoſitus* GF, *ſemiperipheria minor. Unde*] recta GF cadit [*ſupra centrum A, hoc eſt,*] inter A & D. Ergo cum A G D, A F D ſint recti, erunt DGF, DFG duobus rectis minores. Ergo (*d*) C G D, EFD concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

(a) Per cor. 17. p. 32. l. 1.
(b) Per cor. 3. p. 13. l. 1.
(c) Per ſchol. p. 23. l. 1.
(d) Per ſchol. p. 23. l. 1.

[Aliter. *Ad centrum A circuli dati, ſuper radio BA ex utraque parte, fiant ut prius, anguli BAC, BAF, angulis O, N externis trianguli dati ILK reſpective æquales, & in punctis B, G, F circulum tangant tres rectæ, quæ proinde angulos efficient rectos ABC, AGC; & ABE, AFE. Ducantur rectæ BG, BF, quæ ex utraque parte radii BA, formabunt triangula BAG, BAF. Si itaque a duobus angulis rectis ABC, AGC, trianguli BAG anguli ad B & G reſpective ſubducantur, reſtabunt anguli GBC, BGC duobus rectis minores: ergo tangentes BC, GC, ſi protrahantur ex parte angulorum duobus rectis minorum, tandem* (e) *concurrent. Eodem modo tangentes BE, FE, ſi producantur, concurrent. Producantur & concurrant BC, GC in C; & BE, FE in E. Cum igitur in quadrilatero ABCG anguli ad B & G ſunt recti, erunt anguli BAG, BCG duobus rectis* (f) *æquales. Sed anguli O, I ſunt duobus rectis* (g) *æquales, quorum O* (h) *æquatur angulo BAG; Ergo angulus BCG æquatur angulo I. Eodem modo oſtendetur angulum B E F angulo K æqualem eſſe. Sed anguli I & K ſimul ſumpti, ſunt duobus rectis* (i) *minores: ergo anguli GCE, CEF ſunt duobus rectis minores, & proinde rectæ CG, EF* (k) *concurrent ſi protrahantur. Concurrant in D. Cum igitur anguli C & E trianguli CDE, angulis I & K trianguli ILK reſpective æquales ſint; angulus D angulo L* (l) *æqualis erit: & ſingula trianguli CDE latera* (m) *tangunt circulum datum. Circulo igitur BGF circumſcribitur triangulum CDE, æquiangulum dato ILK. Q.E.F.*]

Fig. 3.
(e) Per ſchol. p. 31. l. 1.
(f) Per Theor. 1. poſt 31. l. 1.
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per conſtr.
(i) Per cor. 17. p. 32. l. 1
(k) Per ſchol. poſt. 31. l. 1.
(l) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(m) Per conſtr.

PROPOSITIO IV.

T*Riangulo circulum inſcribere.* Fig. 3.

Duos angulos C & E biſeca rectis CA, FA coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, AF. Circulus centro A per B deſcriptus, tranſibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In

In triangulis enim CAG & CAB, quia anguli AGC, ABC itemque GCA, BCA per conſtr. æquantur, & latus quoque AC eſt commune, etiam AG, AB (*a*) æqualia erunt. Pari modo oſtendam paria eſſe AB, AF. Circulus ergo deſcriptus centro A per B, tranſit per G, F; & quia anguli ad B, G, F ſunt recti, tangit (*b*) omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

(a) *Per* 26 *l.* 1.

(b) *Per* 16. *l.* 3.

Fig. 3.

Cor. 1. *Hinc cognitis lateribus trianguli, invenientur eorum ſegmenta quæ fiunt a contactibus circuli inſcripti. Sit* DC = 12, DE = 16, CE = 18. *Erit* CD + DE = 28, *a quo ſubduc* CE (= 18) = CG + EF, *&* *reſtabunt* GD + DF = 10. *Ergo* (c) GD = 5 = DF; GC = 7 = CB; BE = 11 = EF.

(c) *Per cor.* 2. *p* 36. *l.* 3.

Cor. 2. *Datis trianguli lateribus, & radio circuli inſcripti, habetur area trianguli. Nam ducta AD, inſcripti circuli radius eſt altitudo communis trium triangulorum ACD, ADE, AEC in quæ dividitur triangulum CDE, & eorum baſes ſunt trianguli CDE latera: ergo radius in laterum ſemiſummam, dabit* (d) *aream trianguli CDE. Sit radius* AB = 5, *& latera* 12, 16, 18; *quorum ſemiſumma eſt* 23: *Eſt itaque* 5 × 23 = 115 = *area trianguli.*]

(d) *Per ſchol. p.* 41. *l.* 1. *& p.* 1. *l.* 2.

PROPOSITIO V.

Fig. 4.

T*Riangulo circulum circumſcribere, ſive per tria data puncta* (B, C, D) *non ad unam rectam poſita, circulum deſcribere.*

Puncta data B, C, D binis rectis BC, CD connecte, quas biſeca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB. Per conſtr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O ſunt recti. Ergo AD (*e*) æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB (*f*) æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B, tranſibit etiam per C & D. Quod petebatur.

(e) *Per* 4 *l.* 1.

(f) *Per axio.* 1.

Ad praxim tantum opus centris B, C, D deſcribere tres æquales circulos ſe mutuo interſecantes, & per interſectiones ducere rectas: hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

[Coroll. *Hinc liquet, circulum etiam Quadrilatero ABCF, cujus anguli oppoſiti ABC, AFC duobus rectis æquales ſint, circumſcribi poſſe. Nam ducta recta AC, circulus per hanc prop.*

Tab. 2. *Fig.* 36. *lib.* 3.

prop. circa triangulum ABC deſcribi poteſt. Deſcribatur; &
in arcu oppoſito AFC, capiatur punctum quodvis D, & DA,
DC ducantur. Ergo eſt ABCD quadrilaterum circulo inſcri-
ptum, ac proinde anguli oppoſiti ABC, ADC,(a) *æquales ſunt* (a) Per 22. l. 3.
duobus rectis. Sed in quadrilatero ABCF, anguli ABC, AFC
æquales duobus rectis eſſe ponuntur. Ablato igitur communi
ABC, æquales erunt anguli ADC, AFC, eidem arcui ABC
inſiſtentes, quorum alter ADC eſt angulus ad peripheriam ipſi
ABC oppoſitam: Ergo (b) *uterque angulorum æqualium ad e-* (b) Per
amdem peripheriam exiſtit, & proinde circulus per A, B, C, ſchol. poſt
tres angulos quadrilateri ABCE deſcriptus, tranſibit etiam pr. 21. l. 3.
per angulum quartum F. Q.E.D.

Scholium. *Si triangulo circulus circumſcribatur, pro varia* Fig. 5. l. 4.
trianguli circumſcripti ſpecie, centrum circuli varie cadet. Si
fuerit acutangulum, centrum cadet intra triangulum. Nam
propter angulum acutum BCD (c) *in ſegmento majore, cen-* (c) Per 21.
trum A cadet in illo ſegmento majore cujus baſis eſt BD; at- & ſchol. p.
que eodem modo oſtendetur centrum eſſe in illis ſegmentis ma- 21. l. 3.
joribus quorum baſes ſunt BC, CD reſpective, adeoque cadet
intra triangulum BCD. In triangulo vero rectangulo, propter Fig. 6.
angulum in ſemicirculo (d) *rectum, centrum cadet in latus an-* [d] Per
gulo recto oppoſitum. In obtuſangulo autem triangulo, propter ead.
angulum obtuſum in(e)*ſegmento minore, centrum erit in ſegmē-* Fig. 7. [e] Per.
to oppoſito, ac proinde extra triangulum cadet. Hinc ſequitur, ead.

1. *Si a centro A ad ſingulos angulos B, C, D, trianguli* Fig. 5.
acutanguli ducantur rectæ AB, AC, AD, illæ triangulum in
tria æquicrura triangula ABC, ABD, ACD (propter æqua-
les AB, AC, AD) divident. Et ob eamdem cauſam, ſi Fig. 6.
recta AC a centro circuli triangulo rectangulo circumſcripti,
ad angulum rectum ducatur, illud in duo triangula iſoſcelia, (f) Vide cor.
ABC, ACD dividet, quod & prius (f) *obſervatum. Si vero* 4. p. 31. l. 3.
ad ſingulos trianguli obtuſanguli angulos, a centro circuli cir- Fig. 7.
cumſcripti, ducantur rectæ AB, AC, AD, formabuntur inde
tria æquicrura triangula, quorum illud cujus baſis eſt latus
BD angulo obtuſo BCD oppoſitum, nempe triangulum BAD, e-
rit extra triangulum obtuſangulum, & ſimul cum eo quadrila-
terum ABCD formabit, duobus reliquis triangulis iſoſceliis
ABC, ACD æquale.

2. *Si a centro A in ſingula latera perpendiculares ducantur* Fig. 5. 6. 7.
radii AEF, AIH, AOG; (vel ſi in circulo qui triangulo rectan-
gulo circumſcribitur, ductis ut prius AEF, AOG, a centro A
erigatur lateri BD perpendicularis AH, quoniam puncta A &
I in illo caſu coincidunt;) iſti radii tum ipſa latera in E, I
& O, tum arcus qui a lateribus ſubtenduntur in F, H & G, [g] Per 21
tum triangulorum iſoſcelium angulos verticales ad A, (g) *biſa-* ſchol. p. 26 l. 1 & p. 30 l. 3.

riam

(a) Per 30. 3.

riam ſecabunt. Et in circulo circa obtuſangulum triangulum, completa diametro HAK, *arcus* BKD *biſecabitur* (a) *in* K.

Fig. 5.
(b) Per cor. 1. p. 3. l. 3.
Fig. 6, 7.
Fig. 6.
Fig. 7.
(c) Per def. 10. l. 3.

3. *Unde in triangulo acutangulo,* BE, BI, CO, *&c. ſemiſſes laterum* BC, BD, CD, *erunt* (b) *angulorum* BAF, BAH, CAG, *&c. ſinus recti; & ſimiliter in triang. rectang. vel obtuſang. ipſas* BE, CO *angulorum* BAF, CAG *ſinus rectos eſſe conſtat: in triangulo autem rectangulo radium circuli* BI *anguli recti* BAH *ſinum rectum eſſe patet ex def.* 10. *l.* 3. *Et cum idem* (c) *ſit anguli cujuſvis, & complementi ejus ad duos rectos, ſinus rectus; Ergo in caſu trianguli obliquanguli, recta* BI *tam anguli* BAH *quam etiam anguli* BAK *ſinus rectus erit.*

Fig. 5, 6, 7.
(d) Per cor. 2. hujus ſch.
(e) Per 20. l. 3.
(f) Per axio. 6.
Fig. 5, 6.
Fig. 7.

4. *Angulus ad centrum* BAF *ſuper arcu dimidio* BF, *æqualis eſt angulo ad peripheriam* BDC *ſuper arcu integro* BC. *Cum enim angulus* BAC *tum anguli* BAF (d) *ad centrum, tum anguli* BDC *ad* (e) *circumferentiam duplus ſit; anguli igitur* BAF, BDC (f) *æquales erunt. Et pari modo oſtendetur æquales eſſe angulos* CAG, CBD; *item æquales eſſe in triangulo acutangulo angulos* BAH, BCD, *quos in triangulo rectangulo rectos & proinde æquales eſſe patet: In circulo autem circa triangulum obtuſangulum deſcripto, angulum* BAK *ad centrum ſuper arcu dimidio* BK, *angulo obtuſo* BCD *ad peripheriam ſuper arcu integro* BKD *æqualem eſſe ſic probatur. Ductis* BK, DK, *angulum ad centrum* BAH *ſuper arcu dimidio, æqualem eſſe angulo ad peripheriam* BKD *ſuper arcu integro, patet ut ſupra: ſed in quadrilatero* BCDK *circulo inſcripto, anguli oppoſiti* BCD, BKD (g) *duobus rectis, hoc eſt, angulis* BAH, BAK *ſimul ſumptis* (h) *æquantur. Ablatis igitur æqualibus* BKD, BAH, *remanebunt æquales* BCD, BAK.

(g) Per 22. l. 3.
(h) Per 13. l. 1.
Fig. 5, 6, 7.
(i) Per cor. 3. hujus ſch.
(K) Per cor. 3. huj. ſchol.

5. *Cujuſcumque trianguli* BCD *latera* BC, BD, CD *ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum* BDC, BCD, CBD *lateribus reſpective oppoſitorum. Nam latera* BC, BD, CD *ſunt inter ſe invicem ut eorum ſemiſſes* BE, BI, CO, *hoc eſt, ut* (i) *ſinus angulorum* BAF, BAH (*vel* BAK) CAG. *Sed anguli iſti angulis* (k) BDC, BCD, CBD *reſpective ſunt æquales. Ergo latera* BC, BD, CD *ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum lateribus illis reſpective oppoſitorum. Atque ab hoc unico corollario, magna pars trigonometriæ planæ deducitur: quod diligenter eſt notandum.*

Fig. 62. l. 1.
(l) Per cor. 5. huj. ſchol.

6. *Hinc* Lunæ *diſtantiam metiri diſcimus. Dato enim per obſervationes Aſtronomicas Parallaxeos diurnæ angulo* BCA, *& angulo* DBC, *& proinde ejus complemento ad duos rectos* CBA, *una cum Telluris ſemidiametro* AB, *Lunæ diſtantiam ſequenti analogia inveſtigamus. Ut ſinus anguli* ACB, *ad ſinum anguli* (l) CBA; *ita* BA *Telluris ſemidiameter, ad* AC *diſtantiam Lunæ.* Q. F. I.

7. *Hinc*

7. *Hinc Solis etiam diſtantiam metiri diſcimus. Datis e-* Fig 8. l. 4.
nim per obſervationes Aſtronomicas parallaxeos menſtrua an-
gulo, ubi ſcilicet Luna praciſe biſecta apparet ZEO, & *Luna*
diſtantia ZO; *per analogiam ſequentem, diſtantiam Solis*
colligimus. Ut Sinus anguli ZEO, *ad ſinum angul recti* EOZ
ſive, (a) *radium*; (b) *ita* ZO *diſtantia Luna, ad* ZE *diſtan-* (a) Per def. 10. l. 3.
tiam Solis. *Q. E. I.*] (b) Per cor. 5. huj. ſchol.

PROPOSITIO VI. & VII.

Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere. Fig 9.

Ducantur diametri BD, CE ſe mutuo ſecantes perpendiculariter. Rectæ quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. [*Nam in triangulis* CAD, DAE, *ob angulos æquales ad* A, *nempe rectos, &*
latera circa illos reſpective æqualia, baſes CD, DE (c) *æquales* (c) Per 4. l. 1.
erunt; & eodem modo omnia latera EB, BC, CD, DE *figura inſcripta ſibi invicem æquari patebit. Et quia* CE *circuli*
diameter eſt, angulus CDE *in ſemicirculo* (d) *rectus erit; &* (d) Per 31 l. 3.
ob eamdem rationem anguli DEB, EBC, BCD *recti ſunt*.
Quadrilaterum ergo inſcriptum eſt æquilaterum & rectangulum; & (e) *proinde quadratum eſt*. (e) Per def. 31. l. 1.

Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura I F G H quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. l. 3. & ex 28. 30. & 34. l. 1.

[*Quia enim recta* HI, IF, FG, GH *circulum tangunt in*
extremitatibus diametrorum BD, CE: *cum diametris iſtis* (f) (f) Per 18. l. 3.
efficient angulos rectos ad, B, C, D, E. *Et propter angulos etiam*
rectos ad centrum A, *æquales erunt alterni anguli* CAB, ABH,
& *recta* CE, IH (g) *erunt parallela: eodem modo conſtabit* (g) Per 28. l. 1.
rectas CE, FG *parallelas eſſe. Ergo &* FG, IH *parallela* (h) (h) Per 30. l. 1.
ſunt. Et pari modo probabitur rectas FI, GH *cum recta* DB,
tum ſibi invicem parallelas eſſe. Parallelogrammum igitur eſt
IFGH, & *latera oppoſita* (i) *æqualia ſunt; nempe* FI = GH, (i) Per 34. l. 1.
& FG = IH. *Sed ob parallelogramma* CFGE, & DGHB, (k) Per eamd.
latera FG, GH *parallelogrammi* FGHI, (k) *æqualia ſunt circuli diametris* CE, DB; & *proinde omnia latera* IF, FG, GH,
HI *ſibi invicem æqualia ſunt. Porro, in parallelogrammo*
FDAC, *angulus ad* A *rectus eſt: ergo etiam angulus ad* F *rectus* (l) *erit; & pari modo, anguli ad* G, H, I *recti erunt*. (l) Per eamd.

Ergo IFGH eſt parallelogrammum æquilaterum & rectangulum, ſive quadratum: cujus omnia latera circulum datum tangunt. Eſt igitur quadratum circulo circumſcriptum.]

Scholium.

Fig. 9. (a) Per 31. l. 3. (b) Per 47. l. 1. (c) Per cor. 1. p. 47. l. 1.

QUadratum circumſcriptum circulo, duplum eſt inſcripti: Nam quia angulus BCD in ſemicirculo rectus (*a*) eſt, erit quadratum ex DB (hoc eſt quadratum FI) æquale (*b*) quadratis DC, BC, ac proinde (*c*) duplum quadrati DC, hoc eſt quadrati CDEB. [*Item quadratum inſcriptum duplum eſt radii quadrati.*]

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 10.

QUadrato (*BEFC*) *circulum inſcribere, & circumſcribere.*

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per B deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera ſunt æqualia, erunt
(d) Per 5. l. 1. anguli BCE, BEC (*d*) æquales. Angulus autem CBE re-
(e) Per cor. 11 p. 32. l. 1. ctus eſt per hyp. Ergo BCE, BEC (*e*) ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam CBF & reliquos eſſe ſemirectos, adeoque æquales inter ſe. Ergo in triangulo BAC, cum duo ſint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB & AC
(f) Per 6. l. 1. (*f*) æquales. Eadem ratione AB, AE, AF æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus, tranſibit etiam per E, F, C.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque AB commune,
(g) Per 26. l. 1. latera (g) AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia ſunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D tranſiens,
(h) Per 16. l. 3. tranſibit etiam per G, H, I, tangetque latera (*h*) omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I ſunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

Fig. 9. Coroll. 1. *Hinc, cum angulus CDF a tangente & ſecante factus ſit ſemirectus, ſive gr. 45; & angulus CDG ſeſquirectus ſive gr. 135; ergo latus quadrati circulo inſcriptibilis* (*ſive*

Digitized by Google

(ſive recta abſcindens quadrantem totius peripheriæ) ut DC,
circulum dividet in duo ſegmenta, (a) *quorum majus continet* (a) Per 32. l. 1.
angulum ſemirectum, & minus angulum ſeſquirectum. Angulus igitur in ſegmento quadrantali æqualis eſt angulo recto & ſemirecto ſimul ſumptis, atque angulus ſuper arcu quadrantali, ſive in ſegmento oppoſito, æqualis eſt ſemirecto.

Coroll. 2. *Hinc etiam, ſi ſuper* DC *latere quadrati circulo inſcripti pro diametro, deſcribatur alius circulus minor, ipſius circumferentia per A centrum circuli majoris*
tranſibit. Nam circa quadratum ACFD, cujus angulus (b) Per 9. l. 4.
A eſt in centro majoris circuli, circumſcribetur (b) *iſte circulus minor.*]

PROPOSITIO X.

TRiangulum Iſoſceles conſtruere *(BAC) in quo angulus ad baſim (ABC vel ACB) ſit duplus anguli ad verticem (A.)* Fig. 11.

Sumatur quævis recta AB, quam ita ſeca (*c*) in D, ut (c) Per 11. l. 2.
rectangulum ABD ſit æquale quadrato D A. Tum centro A
per B deſcribe circulum, cui inſcribe BC (*d*) æqualem DA, (d) Per 1. l. 4.
& junge AC. Erit triangulum BAC quæſitum.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A deſcribe (*e*) (e) Per 5. l. 4.
circulum. Quoniam rectangulum A B D æquatur quadrato
AD, hoc eſt BC, liquet BC tangere (*f*) circulum DO quem (f) Per 37. l. 3.
ſecat CD. Ergo angulus B C D æquatur (*g*) angulo A in (g) Per 32. l. 3.
ſegmento alterno: additoque communi D C A, erit BCA
æqualis duobus A & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur, A B C æqualis (*h*) eſt BCA. Ergo etiam A B C æqua- (h) Per 5. l. 1.
tur duobus internis A & DCA. Sed etiam externus BDC
(*i*) æquatur duobus internis A & DCA. Ergo ABC & BDC (i) Per 32. l. 1.
æquales ſunt. Recta igitur DC æquatur (*k*) BC, hoc eſt (K) Per 6. l. 1.
per conſtr. D A. Ergo anguli A & DCA (*l*) æquantur.
Quare angulus ABC, qui duobus oſtenſus eſt æqualis, du- (l) Per 5. l. 1.
plus erit unius A. Factum igitur eſt quod petebatur.

[Scholium. *Ex hujus propoſitionis conſtructione liquet quomodo ex dato AB uno crurum æqualium, conficiatur triangulum quæſitum. Si vero ſuper data baſi CB, triangulum Iſoſceles ABC ſit ita conſtruendum, ut utervis angulorum ad baſim duplus ſit anguli ad verticem; primo, ſuper CB tamquam uno crurum æqualium, conſtruatur ejuſmodi triangulum CBD, cujus vertex ſit C, baſis B D: deinde ſuper BC ad punctum*
C fiat (m) *angulus BCA æqualis angulo CBD, & produca-* (m) Per 23. l. 1.
tur BD donec occurrat ipſi CA in A. Erit ABC triangulum quæſitum ſuper data baſi BC conſtructum.]

Corellaria.

Fig. 11. 1. ANguli ad baſim ſinguli B & C in triangulo Iſoſcelio jam conſtructo, ſunt duæ quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A eſt una quinta duorum rectorum ſeu duæ quintæ unius. Patet ex propoſitione hac & ex 32. lib. 1.

Sch. ad cor. 1. *Cum duo anguli recti per ſemicirculum, ſive per gradus* 180 *menſurentur, erit quinta pars duorum rectorum, nempe angulus A, gr* 36; *& duæ quintæ duorum rectorum, nempe* B, *gr.* 36. *bis, ſive gr.* 72. *Et cum unus ang. rectus ſit gr.* 90, *ejus quinta pars erit gr.* 18. *Ergo angulus A* (*gr.* 36) *continet duas quintas unius recti, & ang.* B (*gr.*72.) *quatuor quintas unius recti, & proinde duæ quintæ duorum rectorum ſunt quatuor quintæ unius recti; & una quinta duorum efficit duas quintas unius. Et univerſaliter, in angulo æſtimando per rectorum quorumcumque partes, dimidiatus rectorum numerus inferet partium numerum duplicatum; & vice verſa. Sic, ſi quivis angulus faciat ſex quintas unius recti; ergo tres quintas duorum rectorum efficiet.*

Fig. 11. Cor. 2. *Cum angulus* BAC *ſit duorum rectorum pars quinta, ſive duæ partes decimæ, hoc eſt gr.* 36 *erit etiam una decima quatuor rectorum, ſive integri circuli, gr.* 360; *& proinde recta* BC *eſt latus decagoni ordinati, circulo inſcribendi, cujus radius ſit* AB *vel* AC.

Cor. 3. *Si radius circuli* AB *ita ſecetur in* D, *ut rectangulum* ABD *ſub toto radio & ſrgmen:o minore, æquale ſit quadrato* DA *ſegmenti majoris; erit ſegmentum illud majus* AD *latus decagoni, circulo cujus radius ſit* AB *inſcribendi. Conſtat enim ex prop. hujus demonſtratione, ſegmentum* AD *ipſi* BC *æquale eſſe.*

Cor. 4. *Si centro* C, *radio* CB *vel* CD *deſcribatur circulus, cum ſit* BCD *triangulum iſoſceles triangulo* BAC *æquiangulum,* (a) *erit baſis* BD *latus decagoni ordinati* (b) *eidem cir-*
(a) Liquet ex hujus prop. 10. demonſtr. *culo inſcribendi. Et cum circuli radius* CB (= (c) AD) *ſit latus hexagoni* (d) *eidem circulo inſcribendi: Ergo, ſi recta*
(b) Per cor. 2. hujus. *quævis* AB *ita ſecetur in* D, *ut rectangulum* ABD *ſub tota* AB *& ſegmento minore* BD *æqurtur quadrato ſegmenti majoris*
(c) Per conſtr. hujus p. 10. AD, *erit ſegmentum maius* AD *latus hexagoni, & minus* DB *decagoni eidem circulo inſcripſibilium. Atque hæc eſt prop.* 9. *lib.* 13. *Euclidis.*

(d) Per cor. 1. p. 15. l. 4. Cor. 6. *Hinc diſcimus arcum circuli quadrantalem in quinque partes æquales (ac proinde, continua* (e) *biſectione, in partes*
(e) Per 30. l. 3. *æquales*

Digitized by Google

æquales 10 20, 40, (&c.) ſecare; nempe arcum BC biſecando. Cum enim recta BC ſit latus (a) decagoni ordinati circulo, cujus centrum ſit A, radius AB, inſcripti; erit arcus BC pars decima totius circumferentiæ, ſive pars quinta ſemicircumferentiæ; atque adeo dimidium ipſius BC erit pars decima ſemicircumferentiæ, ſive pars quinta arcus quadrantalis.]

(a) Per cor. 2. hujus.

PROPOSITIO XI.

C*Irculo pentagonum ordinatum inſcribere.*

Fig. 11. & 12.

Deſcribitur (*b*) triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD (*c*) inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC ſeca biſariam rectis CE, DB, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa, dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum.

(b) *Per præc.*
(c) *Per 2. l. 4.*

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi, AE, ED, DC, CB, BA (*d*) ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ arcubus etiam æquales (*e*) erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero etiam æquiangulum, (*f*) quia ejus anguli BAE, AED, &c. inſiſtunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum eſt igitur quod petebatur.

(d) *Per. 28. l. 3.*
(e) *Per 27. l. 3.*
(f) *Per. 29. l. 3.*

Corollaria.

1. ANgulus Pentagoni ordinati facit ſex quintas unius recti, ſeu (*g*) tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cum ſint æquales, utpote æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtentes, & medius per coroll. 1. præced. ſit duæ quintæ unius recti, tres ſimul, hoc eſt, ipſe pentagoni angulus, conficient ſex quintas unius recti.

Fig. 11.
(g) *Vide ſchol. ad cor. 1. præc.*

[Schol. ad cor. 1. *Cum anguli recti pars quinta ſit gr. 18, erit angulus Pentagoni ordinati gr. 18 ſexies, ſive gr. 108. Cum vero partes ſex quintas unius recti enumerat auctor, idem eſt ac ſi angulum rectum quinta ſui parte auctum diceret.*

Cor. 2. *Ex hujus propoſitionis conſtructione liquet, quomodo ſuper data recta CD, pentagonum ordinatum conſtruere oportet. Fiat* (h) *enim ſuper illa tamquam baſi, triangulum Iſoſceles ACD, in quo angulus ad baſim duplus ſit anguli ad verticem; circa quod,* (i) *circumſcribatur circulus, & biſecentur anguli ad baſim rectis CE, DB, circulo occurrentibus in E, B. Ductæ rectæ AB, BC, DE, EA perficient ordinatum pentagonum ſu-*

Fig. 12.
(h) *Per ſchol. poſt p. 10. l. 4.*
(i) *Per 5. l. 4.*

per data recta CD deſcriptum, uti ex propoſitionis demonſtratione apparet. Aliam porro methodum idem conſtruendi, docebit problema mox ſecuturum.

Scholium 1. *Univerſaliter, figuræ imparium laterum inſcribuntur circulo beneficio triangulorum, Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſim,* multiplices *ſunt eorũ qui ad verticem ſunt Angulorum. Parium vero laterum, figuræ in circulo inſcribuntur ope Iſoſcelium triangulorumquorum anguli ad baſim* multiplices ſeſquialteræ *ſunt eorum qui ad verticem ſunt angulorum. Ut in triangulo Iſoſcele ACD, ſi angulus C aut D æqualis ſit tribus angulis A, Latus CD erit latus Heptagoni; ſi quatuor, erit latus Enneagoni, &c. Sin vero C vel D æqualis ſit* $1\frac{1}{2}$ *anguli A, erit CD latus quadrati: Et ſi C vel D æqualis ſit* $2\frac{1}{2}$ *anguli A, ſubtendet CD ſextam partem circumferentiæ. Pariterque ſi C vel D æqualis ſit* $3\frac{1}{2}$ *anguli A, erit CD latus octogoni, &c. Nam qua ratione in Iſoſcele hujus prop. Angulorum ab baſim biſectorum partes, una cum angulo verticali, inſiſtunt arcubus quinque, æqualibus peripheriæ totius partibus; & proinde ſi ejuſmodi triangulum circulo inſcribatur, ipſius baſis erit latus pentagoni ordinati, eidem circulo inſcribendi: eadem ratione, ſi Iſoſcelis angulus alteruter ad baſim triplus fuerit anguli ad verticem; angulorum ad baſim triſectorum partes, una cum angulo verticali, inſiſtent arcubus ſeptem, æqualibus itidem totius peripheriæ partibus, ac proinde, ſi ejuſmodi triangulum circulo inſcribatur, ipſius baſis erit latus heptagoni ordinati, eidem circulo inſcribendi. Et pari modo cõſtabit de reliquis Sit n numerus laterum figuræ ordinatæ circulo inſcribẽdæ: Erit Iſoſcelis, inſcriptioni inſervientis, Angulus ad baſim, Ad angulum verticalem, Ut* $\frac{n-1}{2}$, *Ad 1. Unde poſita unitate pro angulo verticali, anguli ad baſim Iſoſcelis, una cum angulo iſto verticali, hiſce numeris pro quavis figura ordinata inſcribenda, erunt exponendi; nempe pro triangulo æquilatero,* $1 + 1 + 1 = 3$; *pro quadrato,* $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4$; *pro pentagono* $2 + 2 + 1 = 5$; *pro hexagono* $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6$; *pro heptagono* $3 + 3 + 1 = 7$. *Et eodem modo pro aliis ordinatis inſcribendis, procedendum eſt.*]

Fig. 12.

Scholium. 2.

INgenioſa eſt Euclidea pentagoni inſcriptio, ſed multo expeditior illa Ptolemæi, quam tradit lib. 1. Almageſti, & eſt ejuſmodi.

Ducantur

Ducantur diametri ED, BF ſe mutuo perpendiculariter interſecantes in A. Radium AD biſeca in C. Centro C per B deſcribe arcum, diametro ED occurrentem in G. Recta GB eſt latus pentagoni, & AG decagoni. *Fig.* 13.

Demonſtratio hic dari nequit, pendet enim a prop. 10. lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in ſcholio poſt p. 10. l. 13.

[*In illa prop.* 10. *libri ſui* 13. *demonſtrat Euclides, pentagoni ordinati circulo inſcripti quadratum, æquari quadratis hexagoni & decagoni ordinatorum, eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. Jam vero latus hexagoni ordinati circulo inſcripti, ejuſdem circuli radio æquale eſſe conſtabit ex cor.* 1. *p.* 15. *l.* 4. *Et latus decagoni ordinati eidem circulo inſcripti, partem eſſe majorem radii ſecundum prop.* 11. *l.* 2. *ſecti, conſtat ex cor.* 3. *p.* 10. *l.* 4. *Atque in fig.* 13. *trianguli* ABG *rectanguli ad* A, *latus* AB *eſt circuli* EBDF *radius; & latus* AG *eſt ſegmentum majus radii* AE *ſecundum prop.* 11. *l.* 2. *ſecti, ut propoſitionis illius conſtructionem cum Scholii hujus conſtructione conferenti patebit.* Ergo per 10. *l.* 13. & 47. *l.* 1. BG *erit latus pentagoni eidem circulo inſcripti. Propoſitionis autem illius decimæ lib.* 13. *demonſtrationem, ad calcem libri ſexti apponemus.*]

Problema.

Super data recta (AB) pentagonum ordinatum ita conſtrues. Seca (*a*) AB, ſic ut rectangulum ABC ſit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque producta aufer AD, BE æquales majori ſegmento AC. Centris A & D, intervallo AB deſcribe arcus duos ſe ſecantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo ſe ſecantes in G. Rurſum centris F & G intervallo itidem AB, alios ſe ſecantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc eſt, æquilaterum & æquiangulum) ſuper data AB. *Fig.* 13. (a) *Per* 11. *l.* 2.

Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione: æquiangulum eſſe ſic demonſtrabitur. Ducatur DF. Patet ex conſtructione triangulum AFD eſſe Iſoſceles. Et baſis AD eſt majus ſegmentum lateris DF, extrema & media ratione (*b*) ſecti, (eſt enim DF æqualis AB, & AD æqualis AC.) Ergo angulus (*c*) DAF eſt duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus FAB eſt (*d*) tres quintæ duorum rectorum, ſive ſex quintæ unius recti; ac proinde eſt (*e*) angulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſtenditur angulum GBA eſſe ſex quintas unius recti, ac proinde parem FAB. Unde neceſſe

(b) *Confer p.* 30. *l.* 6. *cum p.* 11. *l.* 2.
(c) *Per cor.* 1. *p.* 10. *l.* 4.
(d) *Per* 13. *l.* 1.
(e) *Per cor.* 1. *p.* 11. *l.* 4

Digitized by Google

ceſſe jam eſt reliquos F, G, I, hrs æquales eſſe, ut patet ex 8. l. 1. ſi concipiatur ſubtendi recta FG.

[*Ducantur enim rectæ FG, FB: Propter triangula ADF, EBG ſuper baſibus æqualibus AD, EB, æqualia, erunt rectæ FG, DE* (a) *parallelæ, & proinde alterni anguli DAF, AFG; EBG, BGF* (b) *æquales; & eorum quilibet erit duæ quintæ duorum rectorum. Porro, cum in triangulo Iſoſcele AFB angulus A ad verticem ſit tres quintæ duorum rectorum,* (c) *erit alteruter ad baſim, una quinta, & proinde BF biſecat angulum AFG, & angulus FBG (ABG—ABF, una nempe quinta ex tribus quintis ſubducta) continebit duas quintas, FGB duas, BFG unam. Igitur in triangulo BFG, latus FB lateri FG* (d) *æquale eſt. Ergo triangula BAF, FIG ſunt ſibi mutuo æquilatera, & proinde* (e) *æquiangula, & angulus FIG continebit etiam tres quintas duorum rectorum, IFG unam, IGF unam. Ergo anguli IFG, GFA ſimul additi, efficiunt etiam tres quintas; & eodem modo angulus IGB continebit etiam tres quintas. Ergo pentagonum eſt æquiangulum. Conſtruitur ergo ſuper data recta AB pentagonum ordinatum. Q. E. F.*

(a) *Per* 40. *l.* 1.
(b) *Per* 27. *l.* 1.
(c) *Per* 32. *l.* 1.
(d) *Per* 6. *l.* 1.
(e) *Per* 8. *l.* 1.

Alio modo ſuper data recta AB conſtruetur pentagonum ordinatum, ſi ſuper AB tamquam baſi, ex parte contraria, fiat triangulum Iſoſceles ABX, cujus angulus ad baſim BAX vel ABX duplus ſit anguli X ad verticem; & productis XA, XB ad F, G, ut ſint AF BG ipſi AB reſpective æquales, centris F & G, radiis AF, BG, deſcribantur circuli ſe ſecantes in duobus punctis, quorum ab AB remotius ſit I, & ducantur FI, GI: Dico factum. Demonſtratio fere eadem erit cum priore: Ducta enim AG, rectarum AB, FG paralleliſmus triangnlorum ABF, ABG (f) *æqualitate etiamnum* (g) *conſtabit.*]

(f) *Per* 4. *l.* 1.
(g) *Per* 40. *l.* 1.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15.

C*Irculo pentagonum ordinatum circumſcribere.*

Inſcribatur pentagonum ordinatum per præced. GHIKM, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas AG, AB, AH, AC, AI. Quoniam BG, BH ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales (*h*) erunt. Trigona igitur GAB, HAB, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Æquantur ergo (*i*) anguli O, P, item Q, S: ac proinde totus B duplus eſt ipſius P, & totus GAH duplus eſt S. Eadem de cauſa anguli C & HAI dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed GAH & HAI æquales (k) ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus GH, HI, per conſtr. Ergo etiam eorum

(h) *Per cor.* 2. *p.* 36. *l.* 3.
(i) *Per* 8. *l.* 1.
(K) *Per* 26. & 29. *l* 3.

Digitized by Google

rum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H (*a*) recti, latuſque AH eſt commune, etiam (*b*) BH, CH, itemque anguli P, T æquales erunt. Eodem modo oſtendam rectas BG, FG eſſe æquales. Igitur CB, FB duplæ ſunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam reliqua latera pentagoni circumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit. Eſt vero & æquiangulum, quia cum jam oſtenſum ſit angulos B & C duplos eſſe æqualium P & T; etiam ipſi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

(a) *Per* 18. *l.* 3. (b) *Per* 26. *l.* 1.

Scholium. Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quæcumque, ſi prius illi ſimilis circulo inſcribatur: [*nempe ductis tangentibus ad illa circumferentiæ puncta*, G, H, I, K, *&c. ubi figuræ inſcriptæ anguli cumferentiam tangunt*.]

PROPOSITIO XIII. & XIV.

P*Entagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere.* *Fig.* 16.

Duos pentagoni angulos B, C biſeca rectis BA, CA concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L deſcriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero deſcriptus centro A per B, tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. [*Ab angulis D, E, F ad punctum A, ducantur etiam DA, EA, FA.*] In trigonis DCA, BCA, qui latera DC, AC, (*c*) lateribus BC, CA, itemque (*d*) anguli P & O æquantur, etiam G & I æquales (*e*) erunt. Sunt vero (*f*) etiam toti B & D æquales. Quare cum (*g*) angulus G ſit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipſius D. Igitur D quoque biſectus eſt recta DA. Ob eamdem cauſam, reliqui pentagoni anguli E, F ſunt biſecti: ac proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA, anguli G, BLA æquantur angulis Q, BMA, latuſque BA commune eſt, etiam (*h*) AL, AM æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas AM, AS, AN, AR inter ſe æquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L, tranſibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R recti ſunt per conſtr. tanget (*i*) quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

(c) *Per hyp.* (d) *Per conſtr.* (e) *Per* 4. *l.* 1. (f) *Per hyp.* (g) *Per conſtr.* (h) *Per* 26. *l.* 1. (i) *Per* 16. *l.* 3.

Pars

Pars 2. In trigono CAB, quia anguli O & G jam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera AC, AB (*a*) æqualia; eademque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD; ac proinde circulus centro A tranſiens per B, tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

(a) Per 26. l. 1.

Fig. 16. [Scholium. *Eadem methodo in qualibet figura æquilatera & æquiangula, & circa quamlibet figuram æquilateram & æquiangulam, circulus deſcribetur, ſi biſecentur duo quivis anguli proximi DCB, CBF rectis CA, BA, & a puncto concurſus A, lateri cuivis BC demittatur perpendicularis AL: Circuli enim centro A radiis AL, AB deſcripti, erunt figuræ data alter inſcriptus, alter circumſcriptus.*

Cor. 1. *Hinc, ſi duo anguli proximi B, C figuræ ordinatæ biſecentur rectis BA, CA, concurrentibus in A, & a puncto concurſus ducantur rectæ AD, AE, AF ad reliquos figuræ angulos; omnes anguli figuræ erunt biſecti. Unde* (b) *figura illa ordinata dividetur in tot triangula iſoſcelia æqualia, quot ſunt latera figuræ. Et ab A demiſſis AL, AM, &c. ad figuræ latera perpendicularibus; hæc latera* (c) *biſecabunt, & cum radii ſint inſcripti circuli, ſibi invicem æquales erunt.*

(b) Per def. 3. l. 4. & p. 6. & 26. l. 1.
(c) Per n. 1. ſchol. p. 26. l. 1.

Cor. 2. *Dato itaque figuræ ordinatæ latere, & radio circuli inſcripti, habetur figuræ illius area, ſi radio in lateris ſemiſſem* (d) *ducto, numerus inde proveniens multiplicetur per denominatorem figuræ. Sic area pentagoni* BCDEF *eſt* AL × LB × 5.]

(d) Per ſch. p. 41. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Fig. 17. **I**N *dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.*

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A deſcribe circulum, qui datum ſecet in C & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in E & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa, dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L (*e*) eſſe æquilatera. Deinde quia anguli CAB, EAF, ſinguli (*f*) efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet (*g*) EAC etiam eſſe unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales ſunt. Sunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo (*h*) baſis EC baſi CB, hoc eſt (ut jam oſtenſum,) radio AC æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt. Eodem modo oſtenditur æquilaterum

[e] Ex 1. l. 1.
[f] Per cor. 12. p. 23. l. 1.
[g] Per 13. l. 1.
[h] Per 4. l. 1.

Digitized by Google

laterum eſſe K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N æquilatera ſunt, patet latera ſingula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, ſeu AB, ac proinde inter ſe. Hexagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero & æquiangulum, cum ſinguli ejus anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

Corollaria.

1. Latus hexagoni circulo inſcripti [*ſive chorda graduum* 60.] æquale eſt radio. [*Ergo ſinus* 30. *graduum æquatur radii* (a) *dimidio.*]

(a) *Per cor.* 1. *p.* 3. *l.* 3.

2. Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti; conſtat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum ſinguli conficiunt (*b*) duas tertias unius recti. [*Continet igitur angulum rectum cum tertia parte recti, hoc eſt,* $gr. 90 + 30. = gr. 120.$]

& cor. p. 30. *l.* 3.
(b) *Per cor.* 12. *p.* 32. *l.* 1.

3. Si ducatur inſuper diameter PS, perpendicularis alteri FB, & intervallo radii PA, centris P & S, ſectiones fiant in O & Q, in R & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa, dabunt duodecangulum ordinatum una circini apertura circulo inſcriptum. Id quod magno eſt uſui in Gnomonica. [*Atque hinc etiam diſcimus arcum quadrantalem PF in tres partes æquales PE, EO, OF (& proinde, continua* (c) *biſectione, in partes æquales* 6, 12, 24, 48, *&c.) partiri.*]

Fig. 18.
(c) *Per* 30. *l.* 3.

4. Ex demonſtratis elicitur etiam deſcriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro FB, centro B per A centrum deſcribe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæſitum.

Fig. 18.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD) a diametro (BF) ad ipſum perpendiculari, quartam partem (BX) abſcindit. Nam anguli ACX, BCX, æqualibus arcubus GD, DB inſiſtentes, æquales (*d*) ſunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Ergo AX, BX (*e*) æquales ſunt. Ergo BX eſt quarta pars diametri BF.

(d) *Per* 29. *l.* 3.
(e) *Per* 4. *l.* 1.

[Aliter. *Propter ACX, BCX ut prius æquales, & angulos ad* X (f) *rectos & proinde æquales, & latus CX commune, erit* (g) $AX = BX$.]

(f) *Per hyp.*
(g) *Per* 26. *l.* 1.

Scholium.

Problema.

Hexagonum ordinatum ſuper data recta (BC) ita conſtrues. Fac (*h*) triangulum CAB æquilaterum ſupra datam CB. Centro A per B & C deſcribe circulum. Is capiet

Fig. 17.
(h) *Per* 1. *l.* 1.

Digitized by Google

capiet hexagonum ſuper data recta CB. Patet ex propoſ. & corol. 1.

Theorema.

Fig. 18. QUadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli cui inſcriptum eſt, adeoque ad quadratum diametri eſt ut 3. ad 4. [*Eſt p.* 12. *l.* 13. *Euclidis.*]

Ducatur ſemidiameter AD. Quadratum FD æquatur
(a) Per 12. l. 2. quadratis (*a*) FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectang. FAX bis eſt par quadrato ſemidiametri FA, ſeu DA:
(b) Per cor. 5. præced. (nam quia AX, XB æquales (*b*) ſunt, rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis nempe ſub FA, AX, & ſub
(c) Per 1. l. 2. FA, XB, hoc eſt rectangulo (*c*) FAB; hoc eſt quadrato FA.) Ergo quadratum FD triplum eſt quadrati ex ſemidiametro.

Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum (*d*) eſt quadrati FA; patet quadratum FD eſſe ad quadra-
(d) Per cor. 3. p. 4. l. 2. tum diametri, ut 3. ad 4.

Corol. Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, ut radix quadratica ternarii eſt ad 2. radicem nempe quadraticam quaternarii, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19. IN *circulo quindecangulum ordinatum deſcribere.*

Circulo inſcribe (*e*) latus pentagoni AC, & trianguli (*f*)
(e) Per 11. l. 4. æquilateri latus AD. Arcum CD biſeca in E. Ducta recta CE eſt latus quindecanguli.
(f) Per cor. 4. p. 15. l. 4. Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15. erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

Corollaria.

Fig. 19. 1 HAC methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera AC, AD circulo ſint inſcripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Ut ſi AD ſit latus quadrati, & AC decagoni, Denominatorum

torum differentia eſt 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero eſt 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter ſe multiplicati faciunt 40.

[Cor. 2. *Hinc diſcimus arcum quadrantalem in 15. partes æquales dividere, (& proinde, continua* (a) *biſectione, in 30, 60, 120, &c. partes;) Si nempe arcus CE, pars decima quinta totius circumferentiæ, biſectione repetita dividatur in partes quatuor æquales. Et univerſaliter, ſi detur cujuſcumq; figuræ ordinatæ circulo inſcriptæ latus* BX; *arcum circuli quadrantalem, repetita arcus* BX *biſectione, in tot partes æquales, quot ſunt latera figuræ, dividere licebit: & continua porro biſectione, ſecabitur arcus quadrantalis in bis, quater, octies, &c. tot partes æquales, quot ſunt latera figuræ.* (a) *Per 30. l. 3.*

Cor. 3. *Cum arcus circuli quadrantalis gradus* 90. *contineat, & unuſquiſque gradus ſcrupula prima* 60; *circumferentiæ quadrans igitur ſcrupula prima* (90 X 60, *ſive*) 5400. *continebit. Si itaque per cor. præced. quadrans in partes* 120 *dividatur, earum ſingulæ ſcrupula prima* 45 $\left(= \frac{5400}{120} \right)$, *nempe tres quartas unius gradus continebunt. Arcus autem adeo minutus, abſque errore ſenſibili, in partes quotvis æquales ac ſi eſſet* (b) *linea recta, dividi poteſt. Dividatur itaque in tres partes æquales, quarum ſingulæ* 15 *ſcrupula prima, ſive gradus quadrantem exhibebunt; unde etiam gradus ſemiſſem* (= 15 + 15) *& gradum integrum* (= 15 + 45) *obtinebimus. Præterea, triſectione arcus* 15, *habemus arcum* 5, *& quiniſectione hujus, arcum unius ſcrupuli primi; unde obſcurum eſſe nequit, quomodo (ſi circulus datus ſatis amplus fuerit) diviſſe in ſcrupula ſecunda effici poterit, atque ita porro. Quod ſi arcus* 45 *curvior videatur quam ut ſecaretur ad libitum ac ſi linea recta eſſet; continua tamen biſectione, ad arcum lineæ rectæ ſatis propinquum tandem perveniemus. Sic* 22 $\frac{1}{2}$ *continent tres octantes,* 11 $\frac{1}{4}$ *tres partes decimas ſextas unius gradus; & ſic porro. Liquet igitur, quomodo circulus in gradus ſuos, graduumque ſemiſſes, quadrantes, octantes, &c. vel, ſi ita lubeat, in ſcrupula prima, ſecunda, tertia; &c. mechanice ſaltem dividi poteſt.* (b) *Per ſch. p. 10. l. 7.*

Scholium 1. *Circuli autem peripheria dividi poteſt Geometrice in partes*

4, 8, 16, *&c. per p.* 6. *l.* 4. *& p.* 9. *l.* 1.
3, 6, 12, *&c. per p.* 15. *l.* 4. *cum cor.* 4. *&* 3.
5, 10, 20, *&c. per p.* 11. *cum cor.* 2. *&* 5. *p.* 10. *l.* 4.
15, 30, 60, *&c. per p.* 16. *l.* 4. *cum cor.* 2.]

Scholium.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt,qua ſolo circino & regula inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 14, 17, &c. cum illa inſcriptio figurarum dependeat a diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentia in 360. partes diviſa, mechanice figuras quaſcumque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.

Problema 1.

Fig. 19. GRadus 360. (hoc eſt, totam circumferentiam) divide per denominatorem polygoni inſcribendi, (exem. gr. nonanguli.) Quot unitatibus conſtat quotiens (40.) tot graduum fac in centro angulum AGK. Ducta recta AK erit latus figuræ quæſitæ (nonangulæ) circulo inſcribendæ.

Problema 2.

Fig. 19. AT ſuper data recta quamvis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis:

Angulus rectus eſt ad angulum figuræ,

			differ.
In Pentagono	ut 5.	ad 6...	1
Hexagono	ut 3.	ad 4...	1
Heptagono	ut 7.	ad 10...	3
Octogono	ut 2.	ad 3...	1
Enneagono	ut 9.	ad 14...	5
Decagono	ut 5.	ad 8...	3
Hendecagono	ut 11.	ad 18...	7
Dodecagono	ut 3.	ad 5...	2

Fig. 19. Oporteat igitur ſuper data recta XB heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X, radio XB deſcribe circulum, a quo abſcinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni: reperies, ut 7. ad 10. & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta B, X, N deſcribe (a) circulum; hic capiet heptagonum ſuper data recta XB.

(a) Per 5. l. 4.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt 32. l. 1 quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt

efficiunt anguli cujuſcumque figuræ rectilineæ, qui numerus diviſus per denominatorem figuræ, exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, ſpatium replere poſſunt: Hoc eſt unam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Ut aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpatium, requiritur ut anguli plurium ejus ſpeciei figurarum circa unum punctum compoſiti, poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera poſſint replere ſpatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, circa punctum A compoſiti, efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri; nam unus facit duas tertias (*a*) unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni; (unus enim facit 4. tertias (*b*) unius recti ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt rurſum 4. rectos.) Ergo, &c.

Fig. 17.

(a) *Per cor. 12. p. 31. l. 1.*

(b) *Per cor. 2. p. 15. l. 4.*

Quod autem id nulla alia figuga poſſit, liquido conſtabit, ſi angulum ejus repertum, ut ſupra, quocumque numero multiplices: ſemper enim aut deficient a 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER QUINTUS.

QUINTUS *hic Elementorum liber demonſtrandis libri ſexti propoſitionibus omnino eſt neceſſarius. Doctrinam quam continet frequentiſſime uſurpamus. Argumentandi vero ratio e proportione Geometrica petita, eſt plane ſubtiliſſima, ſolidiſſima, breviſſima. Cujuſmodi ratiocinandi methodo, tamquam* Logica *quadam*, Mathematica, Geometria, Arithmetica, Muſica, Aſtronomia, Statica, *& reliquæ omnes Matheſeos partes maxime utuntur; utpote quæ proportionibus quibuſdam inter ſe connexis fere totæ nituntur; modoſque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari ſolent.* Geometria *quidem* practica, *quæ linearum, figurarum, atque corporum menſuras complectitur, e propori onum doctrina plerumque derivatur. Regulæ* Arithmeticæ *ad unam omnes ex hujuſce quinti libri propoſitionibus, ſive ſeptimo, octavo, nono de numeris ex profeſſo tractantibus, demonſtrari poſſunt. Antiquorum* Muſicam *proportiones Geometricas Sonorum modulamini applicatas rite dixeris: quod idem fere de* Statica, *corporum ponderibus applicata, poſſis aſſerere. Ut rem totam paucis complectar, ſi proportionis doctrinam e Matheſi abſtuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinquet.*

QUanti momenti in Geometria ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & ſexto libro. Sed quamvis illi ceteriſque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid ſit quatuor magnitudines eſſe proportionales, ſive duas rationes, eaſdem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rationes tum æquales dici ſeu ſimiles, quando antecedentia quocumque numero æqualiter multiplicata, conſequentibus etiam quocumque numero æqualiter multi-

multiplicatis, ſemper vel ſimul æqualia ſunt, vel ſimul majora, vel ſimul minora (*a*). Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonſtrationes mediate vel immediate deducit. Hæc eſt doctrinæ Euclideæ ſumma: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet, Nam in primis certum eſt ea definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tamquam ſignum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonſtrata fuerit de quibuſvis rationibus, inferre certo liceat æquales eas eſſe: vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines eamdem rationem habentes, nihil aliud intelligi velit, quam earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex ea, rationum æqualitas certo poſſet inferri. Id vero minime vulgare theorema eſt, quod neque Euclides, neque alius poſt Euclidem ullus demonſtravit. Si ſecundum; ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſoluta rationum æqualitate. Exemplum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclidea demonſtratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem eſſe rationi baſium AC, & DF, per rationum æqualitatem ſolum intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, baſium rationibus vere & abſolute æquales eſſe, cum demonſtratum non ſit affectionem illam multiplicium cum abſoluta & vera rationum æqualitate neceſſario eſſe connexam. Quomodocumque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit; & tyronibus plurimum ſemper faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & univerſæ Matheſeos eſt, ab ea labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur.

(a) *Hæc definitio ſecluitur infra poſt defin. 6.*

Fig. 1. l. 6.

Primo oſtendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonſtrantur, eo fere loco habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potius ſubinde aliqua, quam demonſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus & perobſcuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundo demonſtrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æque multiplices, conſequentium quibuſlibet æque multiplicibus vel pariter majores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes eſſe vere æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito, omnes Euclideæ demonſtrationes, totaque illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet; ut qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclideas quamvis prolixas, jam tamen ſecuras ac ſolidas ſe poſſit convertere. Aſſignabimus item (ac demonſtrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clariſſimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propoſitiones deducere poterit qui voluerit.

Tertio, de proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione, tractatum ſubjungam, penitioris Geometriæ ſtudioſis plane neceſſarium, ubi etiam demonſtrabimus axioma illud, ſeu potius theorema hactenus indemonſtratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones & primam partem perlegere.

[Monitum ad Tyrones.

QUanti momenti in Geometria ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, *ut recte notat Tacquetus*, qui ignoret. *Eſt enim ipſa quodammodo ſcientiarum Mathematicarum medulla; & varii de proportionalibus ratiocinandi modi, utiliſſimi ſimul ſunt & certiſſimi; neque abſque iis pedem vel bilum promovere licet. Verum hanc doctrinam animis humanis cum communi ratione quaſi congenitam exiſtimo; varioſque de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro, per ambages quamplurimas, tradit Euclides, non tam* demonſtratione *proprie dicta, quam* illuſtratione *nonnulla, & exemplis indigere cenſeo. Eos autem qui longo propoſitionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, rem per ſe clariſſimam nube quadam involvere, & longe difficiliorem reddere omnino puto. Rei ſummam paucis aperiam. Notum eſt quatuor quantitates tum* proportionales, *ſive analogias, tum* ſimiles *aut* æquales *eſſe, cum Quantitas prima toties continet ſecundam, quoties tertia continet quartam: vel cum prima toties continetur in ſecunda, quoties tertia continetur in quarta. Sic* 16 : 8 : : 4 : 2, *atque etiam* 3 : 9 : : 4 : 12. *ſunt* ſimiles *rationes: quoniam in exemplo priore, conſequentia* 8 & 2 *bis in antecedentibus ſuis* 16 & 4 *reſpective continentur: adeoque ratio*

ratio dupla in utriſque obſervatur. Et in exemplo poſteriore rationes ſunt etiam ſimiles, quoniam conſequentia 9 & 12 ter antecedentia ſua reſpectivè continet; adeoque ratio ſubtripla in utriſque obſervatur. (Neque ulla eſt quantitatum commenſurabilium ratio quæ non poſſit per numeros certos; neque ſane incommenſurabilium ulla quæ non poſſit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certiſſime exprimi.) Ratio autem duarum quantitatum, antecedentis ad conſequentem, recte per quotum ex antecedente per conſequentem diviſa ortum exprimitur. Sic ratio 16. ad 8 æquivalet $\frac{16}{8}$ vel $\frac{2}{1}$, ſive 2; ea nempe ratio dupla eſt. Et ratio 3 ad 9 eſt $\frac{3}{9}$ ſive $\frac{1}{3}$, nempe ſubtripla. Et ratio 8 ad 3 eſt $\frac{8}{3}$ ſive $2\frac{2}{3}$, hoc eſt, ratio dupla bipartiens tertias. Ejuſmodi vero quotus, Rationis Exponens appellatur. Porro, ex ante dictis liquet ſimiles rationes quaſcumque non tantum per numeros diverſos, ſed etiam per eoſdem rectiſſime exponi. Sic ſane ratio dupla, ſive 2 ad 1 rationem tam 16 ad 8, quam 4 ad 2 pleniſſime deſignat: Ratio ſubtripla, ſive 1 ad 3 non minus exprimit rationem 4 ad 12, quam rationem 3 ad 9, uti oppido eſt manifeſtum. Si itaque quatuor quantitates ſint proportionales, $A : B :: \alpha : \beta$; quæri ut in hoc quinto libro quot ſimilibus modis hæ ſimiles rationes mutari, atque inter ſe componi poſſint, ita ut rationes emergentes ſint etiamnum utrinque ſimiles? Reſponderi vero debet, modis omnino omnibus, quos quiſquam imaginari queat. Cum enim tam ratio A ad B, quam ratio α ad β inter ſe ſimiles ſint, per eaſdem numeros exprimi utræque poterunt hoc modo, $A : B :: 9 : 3 ::$ & $\alpha : \beta :: 9 : 3$. Atque proinde omnes omnino rationes utrinque aut Alternando, aut Invertendo, aut Componendo, aut Dividendo, aut Convertendo, aut Miſcendo emergentes, per eoſdem plane numeros exprimentur; & eamdem proinde rationem utrinque ſervabunt. Sic e.g. $A + B : B :: \alpha + \beta : \beta$; quia utramque proportionem exprimit $9 + 3 : 3$; quæ eſt rationis compoſitio. Neque aliter de reliquis eſt cenſendum. Hoc itaque tantum obſervent Tyrones, ut rationes quas tractant ubique ſimiles, modo plane ſimili mutentur & ordinentur. Neque exinde locus erit dubitationi, quin ex hujuſmodi ordinatione aut mutatione conſimili, rationes ubique conſimiles ſint oriundæ. Mirari autem ſubit eorum neminem qui elementa Geometrica hactenus condiderunt, facillimum hoc æqualium rationum indicium illuſtrando huic libro quinto, & proportionum doctrinæ facilius explicandæ adhibuiſſe. En vero modos primarios de ſimilibus rationibus argumentandi, quos adhibet Geometria, in brevem Tabellam conjectos:

Sit $A : B :: \alpha : \beta :: 9 : 3.$

Erit ergo

Alternando (*ſive permutando*,) $A : \alpha :: B : \beta :: 9 : 9 :: 3 : 3.$

Invertendo, $B : A :: \beta : \alpha :: 3 : 9.$

Componendo, $A + B : B :: \alpha + \beta : \beta :: 9 + 3\ (12) : 3.$

Dividendo, $A - B : B :: \alpha - \beta : \beta :: 9 - 3\ (6) : 3.$

Convertendo, $A : A + B :: \alpha : \alpha + \beta :: 9 : 9 + 3\ (12.)$

$A : A - B :: \alpha : \alpha - \beta :: 9 : 9 - 3\ (6)$

vel Mixtim, $A + B : A - B :: \alpha + \beta : \alpha - \beta :: 9 + 3\ (12.) : 9 - 3\ (6.)$

Ex quo fit $A : B :: \alpha : \beta$. & $B : C :: \beta : \gamma$. *Erit* $A : C :: \alpha : \gamma$. $9 : 3 :: 9 : 9 :$ & $3 : 1 :: 3 : 1$. *Erit* $9 : 1 :: 9 : 1$. *Ubi ratio A ad C* (*ſeu* 9 *ad* 1) componi *dicitur ex rationibus A ad B*, & *B ad C*, (*vel ex* 9 *ad* 3, & 3. *ad* 1.)

Ex æquo perturbate fit $A : B :: \alpha : \beta.$ $8.\ 3 :: 16.\ 6.$

Et $B : C :: \delta : \alpha.$ $3.\ 2 :: 24.\ 16.$

Erit $A : C :: \delta : \beta.$ $8.\ 2 :: 24.\ 6.$

Ubi, ſicut ratio A ad C (*ſive* 8 *ad* 2) *componitur ex rationibus A ad B*, & *B ad C* (*vel ex* 8 *ad* 3, & 3 *ad* 2) *directe poſitis*; *ſic ratio* δ *ad* β (*ſive* 24 *ad* 6) *componitur ex rationibus* δ *ad* α, & α *ad* β (*ſive ex* 24 *ad* 16, & 16 *ad* 6) *ſed tranſpoſitis*.

Cæterum de compoſitione rationum vide plura in def. 5. *libri* 6.

Denique ſi fuerit $A : B :: C : D :: 9 . 8.$

Et $\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: 3 . 4.$

Erit $A \times \alpha : B \times \beta :: C \times \gamma : D \times \delta :: 27 . 32.$

Et $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{C}{\gamma} : \frac{D}{\delta} :: 3 . 2.$

Qui itaque hoſce de proportionalibus ratiocinandi modos probe callet, eoſque pro re nata in uſum proferre novit, propoſitionibus libri quinti particularibus (*niſi forte illis quæ mere ſunt axiomata ſua luce clariſſima*,) *perraro indigebit*. *Unde ſane, ſi mihi eſſet integrum, rationum doctrinam ſine methodo Euclidea a primordiis tradidiſſem*: *ſed cum Tacquetum noſtrum, ordinis Euclidei ubique obſervantiſſimum, eumque integrum Lectori propinare certum ſit, pluribus ſuperſedebo*.

* *Hæc monuit Vir ille Clariſſ. mihique amiciſſimus qui editionem primam Cantabrigienſem recenſuit*. *Atqui velim potius ut ipſum Tacquetum hoc loco audiant Tyrones, ac definitionibus, priorique parti hujus libri incumbant*: *quorum notitia, cum modico tempore & nullo fere negotio acquiri poteſt, haud temere omitti debet*; *maxime, cum ipſæ propoſitiones Euclideæ paſſim in aliis libris mathematicis laudentur*,

quin

Digitized by Google

quin & earum nonnulla, haud paucis quæ in hiſce elementis poſtea traduntur, facilius intelligendis, perutiles videantur, ſi non neceſſaria. Nolim tamen ut ea quæ in hoc monito continentur, negligant Tyrones: ſed potius ut, antequam librum ſextum aggrediantur, præcipuos ex analogia ratiocinandi modos, perlecto hoc compendio, memoriæ infigant. Porro, reliquas hujus l. 5. partes duas, 2. & 3. monente etiam Tacqueto, tyronibus omittere licebit. Et quidem, ea quæ continent, vera atque accurata eſſe omnia, polliceri non auſim.]

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. Pars aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, ſive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, eſt pars aliquanta lineæ 10 pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter excedit. [*Et hujuſmodi quidem pars aliquanta eſt toti commenſurabilis: ſi vero e quadrati cujuſvis diametro ſumatur recta lateri illius quadrati æqualis; ejuſmodi recta erit pars aliquanta quidem diametri, ſed toti incommenſurabilis. Vide Schol. p. 47. l. 1.*]

2. Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota eſt; ſive cum major minorem aliquoties continet præciſe.

3. Ratio ſive proportio, eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primo nominatur; ſive is qui nominandi caſu effertur: Alter Conſequens.

Cum antecedens & conſequens ſunt æquales, proportio æqualitatis dicitur; cum inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis: [*& quidem majoris inæqualitatis, ſi terminus antecedens ſit conſequente major; minoris, ſi minor.*]

4. Ratio ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt

Proportio irrationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines incommenſuribiles, & nullis numeris explicari poteſt. [*Sic proportio 2 ad 1 rationalis eſt; Sed* $\sqrt{2}$ *ad 1 eſt proportio irrationalis; nam* $\sqrt{2}$ *nullis numeris explicari poteſt.*]

Porro commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſura metitur; incommenſurabiles, quas nulla metitur menſura communis.

Fig. 1.2.5. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) ſunt ſimiles æquales, eædem; cum unius antecedens (A) æque ſeu eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minus) continet ſuum conſequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens. (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in ſuo conſequente (B,) quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.) [*Quantitates autem eamdem habentes rationem, proportionales vocantur.*]

Fig. 3. 6. Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſive una ratio eſt major altera, quando unius antecedens (I) magis continet ſuum conſequens (L,) quam alterius antecedens (O) contineat ſuum conſequens (Q;) vel quando antecedens unius, minus continetur in ſuo conſequente, quam antecedens alterius contineatur in conſequente ſuo.
Fig. 4.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Quid porro ſit unum antecedens æque, vel magis continere ſuum conſequens, quam antecedens alterum contineat ſuum, ſi proportiones ſint rationales, definiri & explicari ulterius poteſt per numeros: ut ſi A ſit triplum B, & C triplum F; perſpicuum erit, quid ſit, A æque ſeu eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum L, O vero duplum Q; conſtabit rurſum, quid ſit, I magis continere L, quam O contineat Q. At ſi proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles, A, B: perſpicuum eſt A non ſolum maius eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus; (A quippe aliter continet B, quam alia quælibet major minorve quam A:) neque tamen ulterius quæri, aut explicari debet, qui ſit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus, non debet ulterius quæri, quid ſit unam certo modo continere alteram; ita neque cum dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulterius, quid ſit, C eodem modo contine-

(margin: Fig. 1. beside "explicari ulterius"; Fig. 3. beside "eodem modo continere B"; Fig. 5. beside "portiones fuerint"; Fig. 5. beside "neque tamen")

nere

nere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius eſt inexplicabilis; ita plane etiam identitas modi quo A continet B, cum modo quo C continet D, ulterius inexplicabilis eſt. [*Identitas autem illorum modorum, ex definitione Euclidea rationum æqualium, de qua infra, vel ex altero illo, quod ſequitur, rationum æqualium indicio Tacquetiano, ſatis pro rei natura, videtur explicari.*]

Quod vero cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diverſis terminis conſtantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcumque quantitas C. Et auferatur B ex A incommenſurabili ſecum quantitate, quoties poteſt, puta ter: & ſuperſit E F. Sit deinde O tertia pars ipſius C. Sit inſuper quapiam X ipſi C incommenſurabilis, quæ major ſit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter; C vero continet X minus quam ter, (nam C continet præciſe ter O minorem quam X;) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam eſto Z, ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus quam quater; C vero continet Z plus quam quater, (cum C præciſe quater contineat Q, majorem quam Z;) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B. Fig. 5.

Jam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rurſum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quam A ad B; manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eamdem habere rationem quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine naturali, atque illud: dabile eſt majus quam P, & dabile eſt minus quam P; ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidea deſideretur.

QUod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, cum antecedentium quæcumque æque multiplices I, Q, conſequentium quibuſcumque æque multiplicibus L, R, vel ſimul majores ſunt, vel ſimul minores, vel ſimul æquales: hoc eſt, cum I ſuperante L, etiam Q ſemper ſuperat R; & cum I ſuperatur ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & cum I eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. Ubi bene notandum eſt, Euclidem non aſſumere æque multiplicium exceſſus defectuſque pro- Fig. 11.

Digitized by Google

proportionales, ſeu ſimiles, ſic enim inepte idem per idem explicaſſet; ſed exceſſus & defectus ſimpliciter. Nihilominus hic aliquid in ſummo Geometra deſiderari jam ſupra declaravimus. Nam vel cupit hiſce verbis rationes æquales definire, & ſic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe eſt, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: Vel adducit tamquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & ſic demonſtrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita ſemper eſſe connexam, ut ex illa certo poſſit inferri; quæ quidem connexio & perobſcura & demonſtratu difficilis eſt: Vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quam ſimultaneum illum exceſſum defectumve multiplicium; Et ſic toto 5. ac 6. libro, cum quatuor magnitudines proportionales eſſe demonſtrat, nihil ſciemus aliud, quam dictum exceſſum & defectum illis competere, incerti plane, utrum magnitudines de quibus agitur, ſint vere proportionales.

[*Cum in definitione rationum equalium Euclides nihil aliud, quam quo ſenſu voces illas acceperit, pro more Mathematicorum oſtendere voluerit; non video cur eapropter tantopere culpandus ſit: maxime, cum definitio Euclidea omnibus omnino rationibus æqulibus vere conveniat, ſive rationales fuerint, ſive irrationales, ut in parte 2. hujus lib. 5. Tacquetus ipſe demonſtrat, quod etiam cuilibet ipſam definitionem accuratius perpendenti, ſatis manifeſtum erit. Vide quæ ad def. 36. l. 1. notavimus: ad eumdem enim lapidem utrobique offendit noſter. Cum tamen Tacqueti methodum neceſſe eſt ut ſequamur; videamus tandem, quodnam aliud rationum æqualium indicium univerſale nobis exhibet.*]

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile aſſignatur.

QUod ſi rationum æqualium deſideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale aſſignabimus, demonſtrabimuſque theor. 5. & 6. partis 2. [*At vero demonſtratione operoſa non videtur indigere hoc rationum æqualium indicium; ex definitionibus enim quinta & ſexta immediate fluit; vel potius, tamquam definitionum iſtarum illuſtratio quædam exiſtimari debet.*] Eſtque ejuſmodi.

Fig. 16. Rationes [majoris inæqualitatis] æquales ſunt, (AB ad CF; GM ad NQ;) quando & conſequentes ipſæ, & conſequentium ſimiles partes aliquotæ quæcumque, in antecedentibus æquali ſemper numero continentur.

Ut

Ut ſi una decima ipſius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM; & ſi una centeſima CF contineatur millies in AB, etiam una centeſima NQ contineatur millies in GM, & ſic deinceps in infinitum; erit AB ad CF, ut GM ad NQ. [*Ita enim fiet ut (ſecundum def. quintam) prioris rationis antecedens AB æque ſeu eodem modo (hoc eſt, nec magis nec minus) contineat ſuum conſequens CF, quo poſterioris antecedens GM continet ſuum conſequens NQ.*

Vel ſi minoris inæqualitatis rationes, CF ad AB; NQ ad GM ponantur æquales; tum antecedentes ipſa, & antecedentium ſimiles partes aliquotæ quæcumque, in conſequentibus ſuis æquali ſemper numero continebuntur. Hoc enim rurſum poſtulat def. quinta, ut ſcil. antecedens CF eodem modo contineatur in ſuo conſequente AB, quo antecedens NQ in ſuo GM.]

Inæquales autem rationes ſunt, quando aut conſequentes ipſæ, aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major eſt, cujus vel conſequens, vel conſequentis aliquota, ſæpius continetur in antecedente.

Ut ſi una centimilleſima CF ſæpius contineatur in AB, quam una centimilleſima NQ, in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliæ conſequentium CF, NQ ſimiles aliquotæ in antecedentibus AB, GM æquali numero continerentur. [*Sequitur ex def.* 6.] *Fig.*

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio, rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuo eluceſcit, cum ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles, per ablata conſequentibus commenſurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æque, ſeu eodem modo continentur, ut qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſane nihil aliud eſt, quam partes ad ſua tota [*vel etiam tota ad partes ſuas*] eamdem habere rationem; [*ſive partes illæ totis ſuis commenſurabiles fuerint, ſeu incommenſurabiles.*]

Similes verò partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur; ut ſi utraque ſit ſui totius una tertia, una decima, &c.

8. Magnitudines (A, B, C, D) continue proportionales dicuntur, cum medii termini (B, C) bis ſumuntur; hoc eſt, cum ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis. *Fig* 6.

Continuas

Continuas rationes ſic efferimus : A eſt ad B , ut B ad C ; & B eſt ad C , ut C ad D , & ſic deinceps.

9. Magnitudines diſcretim proportionales ſunt , cum nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1. Diſcretas rationes ſic efferimus : A eſt ad B , ut C ad F.

Cum plures fuerint proportionales magnitudines quam tres , ſi proportionales dicantur , ſemper intelliguntur diſcretim.

Fig. 6. 10. Cum magnitudines (A , B , C , D) fuerint continue proportionales , prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis , quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B ;) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus , quam eadem prima habet ad ſecundam (B :) & ſic deinceps.

[*Item , prima (A) ad ſecundam (B) ſubduplicatam (ſive dimidiatam) rationem habere dicitur ejus rationis quam habet eadem prima (A) ad tertiam (C ,) & ſubtriplicatam ejus rationis quam habet prima (A) ad quartam (D :) & ſic deinceps.*

Si vero ratio aliqua triplicata , ſit alteri rationi duplicatæ æqualis ; erit ratio ſimplex poſterior , rationis ſimplicis prioris ſeſquiplicata ſive ſeſquialtera. *Sint A , B , C , D* ∺ ; *&* α , β , γ ∺ ; *& ſit A prima ad D quartam in priore analogia , ut* α *prima ad* γ *tertiam in ſecunda analogia , dico quod* α *eſt ad* β *in ratione ſeſquialtera rationis A ad B. Sit enim F inter B & C , ſive quod perinde eſt , inter A & D media proportionalis : Ob æquales rationes A ad D &* α *ad* γ *, & medias proportionales utrinque F &* β *, Erit A : F : :* α *:* β*. Sed ratio A ad F componitur ex ratione integra A ad B & ex dimidiata quoque ejuſdem ratione B ad F atque adeo ratio* α *ad* β *rationi A ad F æqualis , continet rationem A ad B integram , & etiam rationem ejuſdem dimidiatam , nempe rationem B ad F. Ratio vero integra & dimidiata dicitur ratio ſeſquiplicata ſive* ſeſquialtera . *Eſt ergo* α *ad* β *in ratione ſeſquiplicata ſive* ſeſquialtera *A ad B. Sic ſane in Aſtronomicis , cum cubi diſtantiarum planetarum a Sole eam inter ſe rationem habeant quam temporum periodicorum quadrata ; ita ut* triplicata *diſtantiarum ratio eadem ſit cum ratione temporum periodicorum* duplicata ; (*Cubi enim ſunt in* (a) *triplicata , & quadrata ſunt* (b) *in duplicata ratione laterum ſuorum , ſive radicum , reſpective ;) dici ſolet , tempora ipſa periodica eſſe inter ſe in ratione ſeſquiplicata ſive* ſeſquialtera *diſtantiarum a Sole.*]

(a) Per 33. l. 11.
(b) Per 20. l. 6.

11. Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus. Ut ſi A eſt ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C; & B, F. Fig. 1.

Reliquæ definitiones commodius ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex his 10. non alium uſum habent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur, Illis igitur prætermiſſis; 15. reliquas proponemus ſolas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis repræſentant.

Axioma.

DAtis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO I, II, III, IV, V, VI.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperflua*. [Inter has inſignior & uſus frequentioris eſt prop. 4. cujus demonſtratio habetur infra. Eſt enim Lem. 1. par. 2. hujus libri 5.]

PROPOSITIO VII.

S*I quantitates A & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B eſt ad Z. Et Z erit ad A, ut eadem Z eſt ad B.* Fig 2.

Hæc propoſitio, uti & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

[Scholium. *Eodem modo, æquales ad æquales eamdem habent rationem; hoc eſt, ſi detur etiam alia quantitas X, ipſi Z æqualis; erit A ad X, ut B eſt ad Z; & vice verſa. Sic etiam propoſitionum 3. ſequentium patebit adhuc veritas, ſi loco unicæ quantitatis Z, ubique ponantur duæ æquales, X & Z.*]

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates (C & F) fuerint inæquales ; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem , quam minor F habeat ad eamdem Z.* [Item minor F minorem habet rationem ad Z , quam habet major C ad Z.]

Et Z ad majorem C , minorem habebit rationem , quam eadem Z habeat ad F , quæ minor eſt quam C. [Et Z ad minorem F, majorem habebit rationem , quam habet eadem Z ad C quæ major eſt .]

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eamdem habeant rationem , æquales ſunt A & B.*

Et ſi eadem Z ad A & B eamdem rationem habeat , rurſum A & B æquales erunt .

PROPOSITIO X.

Fig. 8. *SI C ad Z majorem rationem habeat , quam F ad Z ; erit C major quam F.* [Et proinde, ſi F minorem habeat rationem ad Z , quam habet C ad Z ; F minor erit quam C.

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat , quam eadem Z ad C ; erit F minor quam C. [Et ſi Z ad C minorem rationem habeat , quam habet eadem Z ad F ; erit C major quam F.]

PROPOSITIO XI.

Fig. 9. *RAtiones , quæ eidem rationi ſunt æquales , eadem , ſimiles , (idem omnia ſignificant ,) ſunt æquales , eadem , ſimiles inter ſe .*

Ut ſi tam ratio A ad B, quam ratio C ad F) ſint æquales rationi X ad Z , erunt quoque rationes A ad B , & C ad F

Digitized by Google

ad F æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z; & C ſit ad F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

[*Scholium.*] Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales. [*Et rationes quæ una æqualium rationum majores vel minores ſunt, etiam altera æqualium majores vel minores erunt: aut ſi æqualium rationum una quævis, ratione tertia major fuerit vel minor, etiam altera æqualium eadem tertia major vel minor erit reſpective.*

Ex. gr. *Si A ſit ad B ut C ad F; & ſit ratio C ad F major ratione X ad A; Erit quoque ratio A ad B major ratione X ad Z; quæ ipſa eſt prop. 13. a Tacqueto omiſſa. Eodem modo ſi fuerit A ad B ut X ad Z; & fuerit ratio X ad Z minor quam ratio C ad F; erit etiam ratio A ad B minor ratione C ad F.*]

PROPOSITIO XII.

SI ſingulæ magnitudines quotcumque (A, B, C,) eamdem habuerint proportionem ad ſingulas totidem (F, I, L;) quam proportionem habent ſingula ad ſingula, ſive una (A) ad unam (F;) eamdem habebunt omnes (A, B, C) ſimul ſumptæ, ad omnes (F, I, L) ſimul ſumptas. Fig. 10.

Rem per ſe manifeſtam exemplo tantum aliquo rationali declaro; ut ſi ſingulæ A, B, C, ſingularum F, I, L, ſint tripla, (hoc eſt, ſi ſingulæ ad ſingulas eamdem habeant rationem quam 3. ad 1.) etiam A, B, C ſimul ſumptæ, ſimul ſumptarum F, I, L triplæ erunt, (hoc eſt; etiam A, B, C ſimul ſumptæ ad F, I, L ſimul ſumptas rationem habent eamdem, quam 3. ad 1.) In proportione irrationali res æque clara eſt.

[*Propoſitionem 13. in Scholio poſt pr. 11. ſupra collocavimus; demonſtratione enim vix eget. Sequens autem propoſitio 14. etſi Tacqueto ſuperflua, uſum ſuum habet, atque adeo illam in locum ſuum reduxi cum demonſtratione ſua.*]

PROPOSITIO XIV.

SI prima (A) ſit ad ſecundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F,) & ſit prima (A) major quam tertia (C,) erit ſecunda (B) major quam quarta (F:) Si vero prima ſit æqualis tertiæ, erit ſecunda quartæ æqualis: Et ſi minor, minor. Fig. 11.

Si

Digitized by Google

Si data fuerit proportio æqualitatis, ubi antecedentia conſequentibus ſuis æqualia ſunt, propoſitio per ſe patet. Et (a) *cum, in proportione majoris inæqualitatis, unius antecedens æque ſeu eodem modo contineat ſuum conſequent quo alterius antecedens continet ſuum conſequens; atque in proportione inæqualitatis minoris, antecedens unius eodem modo contineatur in ſuo conſequente quo antecedens alterius in ſuo continetur; etiam in proportione inæqualitatis majoris vel minoris, propoſitio ſatis patebit attendenti. Si quis tamen ampliorem demonſtrationem velit, legat ea quæ ſequuntur.*

1. *Sit A major quam C, eritque ratio A ad B* (b) *major ratione C ad B. Sed eſt* (c) *A ad B ut C ad F: ergo ratio C ad F major* (d) *eſt ratione C ad B:* (e) *unde F minor eſt quam B, & proinde B major quam F.*

2. *Sit A æqualis ipſi C; erit ratio A ad B* (f) *æqualis rationi C ad B: Sed eſt A ad B ut C ad F: erit* (g) *igitur C ad B ut C ad F, ac proinde B & F* (h) *æquales erunt.*

3. *Sit A minor quam C; & habebit A ad B minorem* (i) *rationem quam habet C ad B. Eſt autem A ad B ut C ad F: ergo C* (k) *minorem habet rationem ad F quam habet eadem C ad B; & proinde F* (l) *major eſt quam B, ſeu B minor quam F.*]

(a) Per def.5.l.5.
(b) Per 8. l.5.
(c) Per hypoth.
(d) Per ſchol. poſt p.11.l.5.
(e) Per 10.l.5.
(f) Per 7. l.5.
(g) Per 11.l.5.
(h) Per 9. l.5.
(i) Per 8. l.5.
(K) Per ſchol. poſt p.11.l.5.
(l) Per 10. l.5.

PROPOSITIO XV.

Fig. 10. *Aliquota ſimiles (F, I) eamdem inter ſe rationem habent quam tota (A, B.)*

Fig. 11. *Et univerſim, partes ſimiles (C, F) ſunt inter ſe ut tota (A, B)* [ſive partes illæ totis ſuis fuerint commenſurabiles, ſive non fuerint.]

Vere inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi recte intelligatur quid ſint partes ſimiles. Vide defin.7.

Fig. 12. Schol. *Partes ſimiles CB, LI, ſi a totis ſuis AB, FI auferantur, relinquunt partes ſimiles AC, FL; quod per ſe ſatis manifeſtum eſt.*]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. et 2. *Si prima (A) ſit ad ſecundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F;) etiam* permutando *erit prima (A) ad tertiam (C,) ut ſecunda (B) ad quartam (F.)*

Ponan-

Ponantur B & F eſſe minores quam A & C; (nam ſi æquales ſint, res patet ;) [*Tunc enim , æquales A & B ad æquales C & F eamdem rationem* (a) *bebebunt, ut ſit A : C :: B: F.*] (a) *Per ſcho. poſt. p. 7. l. 5.* Quoniam A ponitur eſſe ad B , ut C ad F , erunt per defin. 7. B & F , totorum A & C partes ſimiles, ac proinde per præc. quam proportionem inter ſe habent tota A , C , eam quoque habent partes ſimiles B , F ; hoc eſt , A eſt ad C, ut B ad F . [*Eodem modo ſi antecedentes A & C minores fuerint conſequentibus B & F reſpective ; cum ſit A : B :: C : F ,* (b) *erunt A & C partes ſimiles totorum B & F,* & (c) *proinde A : C :: B : F .*] (b) *Per def. 7. l. 5.* (c) *Per 15 l. 5.*

Scholium .

SI A eſt ad B , ut C ad F ; etiam *invertendo* erit ut B ad A , ſic F ad C . Per ſe patet .

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. quæ cum in noſtra methodo tamquam ſuperflua ſit omiſſa , viſum eſt corollarium illud hoc loco ponere .

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) ſit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI;) etiam dividendo *erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens, ad idem conſequens (CB,) ut (FL) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum , ad ſecundum conſequens (LI.)* *Fig. 11.*

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt : ſi tota AB, FI eamdem rationem habeant ad X & Z ; etiam ſimilibus partibus mulctata, eamdem ad X & Z pergent habere rationem : hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z , Id vero eſt quod aſſerit propoſitio . Nam quia ponitur AB eſſe ad CB , ut FI ad LI , erunt (*d*) CB , LI ſimiles partes totorum AB, FI ; & AC, FL erunt tota ſimilibus partibus mulctata . Cum ergo tota habuerint ad CB, LI eamdem rationem ; etiam AC, FL, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eamdem inter ſe habere rationem ; hoc eſt, adhuc erit AC ad CB, ut FL ad FI . (d) *Per def. 7. l. 5.*

[Aliter. *Cum ſit AB: CB :: FI : LI ;* (e) *ergo CB, LI ſunt* (e) *Per def. 7. l. 5.*

(a) Per ſchol. p. 25. l. 5. (b) Per 15. l. 5. (c) Per 11. l. 5.

ſimiles partes totorum AB, FI, & proinde ſi a totis ſuis auferantur, (a) *relinquunt ſimiles partes AC, FL totorum AB, FI. Unde* (b) *AB : FI :: AC:FL; & ob eamdem cauſam AB:FI:: CB : LI. Ergo* (c) *AC : FL :: CB : LI. Et permutando, AC : CB :: FL : LI. Q. E. D.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AC) ſit ad conſequens unum (CB,) ut antecedens alterum (FL) ad conſequens alterum (LI,) etiam componendo *erit (AC cum BC) primum antecedens cum ſuo conſequente, ad idem conſequens (CB,) ut (FL cum LI) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente, ad conſequens (LI.)*

Rurſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates AC, FL, eamdem ad X & Z habeant rationem; etiam AC, FL ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ, pergent ad X & Z eamdem habere rationem; hoc eſt, adhuc erit AC ſic aucta ad X, ut FL ſic aucta ad Z: Id vero eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur AC eſſe ad CB, ut FL ad LI. Quare ſi ipſis AC, FL addantur CB, LI; erunt AC, FL proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cum igitur AC, FL eodem modo ſe habeant ad CB, LI; etiam cum ſimiliter fuerint auctæ, (hoc eſt ipſæ jam AB, FI) pergent ad eaſdem CB, LI eodem modo ſe habere; hoc eſt, adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

(d) Per 16. l. 5. (e) Per 12. l. 5. (f) Per 16. l. 5.

[Aliter. *Cum ſit AC: CB:: FL : LI; ergo* (d) *permutando, erit AC: FL:: CB: LI. Ergo* (e) *AC + CB: FL + LI:: hoc eſt, AB: FI:: CB: LI:) & iterum* (f) *permutando:, AB:CB:: FI : LI. Q. E. D.*]

Corollarium 1.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AB) fuerit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI;) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum (FI) eſt ad (FL) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum (LI.)

(g) Per 17. l. 5. (h) Per ſch. p. 14 l. 5. (i) Per 18 l. 5.

Cum enim AB ſit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo (*g*) AC ad CB, ut FL ad LI: & invertendo (*h*) BC ad CA, ut IL ad LF: & componendo (*i*) BA ad CA, ut IF ad LF.

Hæc

Hæc argumentatio vocatur *converſio* rationis.

[*Et præterea, ſi fuerit unum antecedens* (*AC*) *ad conſequens ſuum* (*CB*,) *ut alterum antecedens* (*FL*) *ſit ad ſuum conſequens* (*LI*;) *erit etiam, ex alia* convertendi *ſpecie, antecedens primum* (*AC*) *ad primum antecedens cum ſuo conſequente* (*AB*) *ut antecedens alterum* (*FL*) *ad alterum antecedens cum ſuo conſequente* (*FI*.)

Cum enim ſit AC: CB :: FL : LI; erit (a) *invertendo*, BC: *CA :: IL: LF; &* (b) *componendo, BA: AC :: IF: FL; & rurſum invertendo, AC : AB :: FL : FI*.] (a) Per ſch. p. 16. l. 5. (b) Per 18 l. 5

Corollarium 2.

SI AC eſt ad AB, ut FL ad FI; erit quoque AC ad CB ut FL ad LI; & AB ad CB, ut FI ad LI. *Fig.* 12.

Cum enim ſit ut AC ad AB, ſic FL ad FI, erit inverteudo, BA ad CA, ut IF ad LF: & divid. (*c*) BC ad CA, ut IL ad LF: & rurſum invertendo, AC ad CB, ut FL ad LI: & compon. (*d*) AB ad CB. ut FI ad LI. (c) Per 17. l. 5. (d) Per 18. l. 5.

[Aliter. *Cum ſit CA : AB :: LF : FI; erit invertendo, BA:AC::IF:FL, &* (e) *convertendo, AB:BC::FI:IL, quod erat unum; &* (f) *dividendo, AC : CB :: FL : LI, quod erat alterum*.] (e) Per cor. 1. hujus. (f) Per 17. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI *ut totum* (*AB*) *eſt ad totum* (*FI*,) *ita ablatum* (*CB*) *ſit ad ablatum* (*LI*,) *etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum* (*AC*) *erit ad reliquum* (*FL*.) *Fig.* 12.

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi. Quoniam AB eſt ad FI, ut CB ad LI; erit permutando (*g*) AB ad CB, ut FI ad LI. Ergo per converſionem rationis AB eſt ad AC, ut (*h*) FI ad FL. Ergo permutando, ut AB ad FI, ita AC ad FL. (g) Per 16. l. 5. (h) Per cor. 1. præc.

[Aliter. *Cum ſit AB : FI :: CB: LI*, (*ſive permutando*, (i) *AB: CB :: FI : LI*;) (k) *erunt CB, LI partes ſimiles totorum AB, FI, & proinde ſi a totis ſuis auferantur*, (l) *relinquunt partes ſimiles AC, FL*. (m) *Ergo AB : FI :: AC : FL*.] (i) Per 16. l. 5. (k) Per def. 7. l. 5. (l) Per ſch. p. 25. l. 5. (m) Per 25. l. 5.

Digitized by Google

PROPOSITIONES XX. & XXI.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperfluæ*. [Habentur tamen in coroll. prop. 22. & 23. quæ ſequuntur]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. *SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps: erit* ex æquo *ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R eſſe minores quam B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam (a) B eſt ad C, ut Q ad R; erunt C, R totorum B, Q (b) partes ſimiles. Cum igitur A & O ad B & Q eamdem habeant rationem; habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum B & Q partes ſimiles, eamdem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eamdem inter ſe habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eamdem inter ſe habere rationem.

[(a) Per hyp. (b) Per def. 7. l. 5.]

Si plures fuerint utrimque quantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

[Aliter *Cum ſit A : B :: O : Q; erit* (c) *permutando, A : O :: B : Q. Et cum ſit B : C :: Q : R; erit permutando, B : Q :: C : R. Ergo* (d) *A : O :: C : R; & iterum permut. A : C :: O : R.*

[(c) Per 16. l. 5. (d) Per 11. l. 5.]

Cor. 1. *Hinc prop. 20. a Tacqueto omiſſa deduci poteſt. Sint enim tres quantitates A, B, C, tribus O, Q, R proportionales, binæ binis; hoc eſt, ſit A : B :: O : Q, & B:C :: Q : R; Si A fuerit major quam C, erit ex æquo O major quam R; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor Nam per hanc prop. erit A : C :: O : R; & permutando, A : O :: C : R. Ergo per 14. hujus libri, liquet propoſitum.*

Cor. 2. *Cum ſit A : B :: O : Q; erit* (e) *componendo, A + B : B :: O + Q : Q. Eſt autem B : C :: Q : R. Ergo per hanc prop. erit A + B : C :: O + Q : R. Et pari modo, ſi* (f) *diviſionem pro compoſitione adhibeas, erit A — B : C :: O — Q : R.*]

[(e) Per 18. l. 5. (f) Per 17. l. 5.]

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam; & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit ex æquo [perturbate] *ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.* Fig. 14.

Ut B eſt ad C, ita (*a*) poteſt Q eſſe ad aliquam quampiam S. Jam quia ut B ad C, ſic (*b*) R eſt ad O, & ut B ad C, ſic Q eſt ad S; (*c*) erit R ad O, (*d*) ut Q ad S. Igitur permutando (*e*) R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut (*f*) A ad B, & Q eſt ad S, (*g*) ut B ad C; ex æquo erit O ad S, ut (*h*) A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt ad S. Ergo etiam (*i*) R eſt ad Q, ut A ad C.

Vocatur a Geometris hæc ratio *perturbata*.

[Coroll. *Sint tres quantitates A, B, C, tribus R, O, Q proportionales, bina binis, ſed perturbate; hoc eſt, ſit A:B::O:Q; & B:C::R:O; ſi A fuerit major quam B, erit ex æquo R major quam Q; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Nam per hanc prop. erit A:C::R:Q; & permutando, A:R::C:Q. Ergo per 14. hujus libri liquet propoſitum. Hæc vero eſt prop. 21. prius omiſſa.*]

(a) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(b) *Per hyp.*
(c) *Per conſtr.*
(d) *Per* 11. *l.* 5.
(e) *Per* 16. *l.* 5.
(f) *Per hyp.*
(g) *Per conſtr.*
(h) *Per præc.*
(i) *Per* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F; erit quoque (*k*) invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A ſit ad B, (*l*) ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit (*m*) ut A ad I, ſic C ad L. Igitur (*n*) componendo, ut AI eſt ad I, ſic CL eſt ad L: I vero eſt ad B, (*o*) ut L ad F. Rurſum igitur (*p*) ex æquo AI eſt ad B, ut CL ad F.

(K) *Per ſch. p.* 16. *l.* 5.
(l) *Per hyp.*
(m) *Per* 22. *l.* 5.
(n) *Per* 18. *l.* 5.
(o) *Per hyp.*
(p) *Per* 22. *l.* 5.

PROPOSITIONES XX. & XXI.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperflua*. [Habentur tamen in coroll. prop. 22. & 23. quæ ſequuntur]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. *SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps: erit* ex æquo *ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R eſſe minores quam B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam (*a*) B eſt ad C,
(a) Per hyp. ut Q ad R; erunt C, R totorum B, Q (*b*) partes ſimiles.
(b) Per def. 7. l. 5. Cum igitur A & O ad B & Q eamdem habeant rationem; habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum B & Q partes ſimiles, eamdem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eamdem inter ſe habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eamdem inter ſe habere rationem.

Si plures fuerint utrimque quantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

[Aliter *Cum ſit A : B :: O : Q; erit* (c) *permutando, A :*
(c) Per 16. l. 5. *O :: B : Q. Et cum ſit B : C :: Q : R; erit permutando, B :*
(d) Per 22. l. 5. *Q :: C : R. Ergo* (d) *A : O :: C : R; & iterum permut. A :* C :: O : R.

Cor. 1. *Hinc prop.* 20. *a Tacqueto omiſſa deduci poteſt. Sint enim tres quantitates A, B, C, tribus O, Q, R proportionales, bina binis; hoc eſt, ſit A : B :: O : Q, & B:C :: Q : R; Si A fuerit major quam C, erit ex æquo O major quam R; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor Nam per hanc prop. erit A : C :: O : R; & permutando, A : O :: C : R. Ergo per* 14. *hujus libri, liquet propoſitum.*

(e) Per 18. l. 5. Cor. 2. *Cum ſit A : B :: O : Q; erit* (e) *componendo, A + B : B :: O + Q : Q. Eſt autem B : C :: Q : R. Ergo per hanc*
(f) Per 17. l. 5. *prop. erit A + B : C :: O + Q : R. Et pari modo, ſi* (f) *diviſionem pro compoſitione adhibeas, erit A — B : C :: O — Q :* R.]

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam; & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quapiam R ad primam O; erit ex æquo [perturbate] *ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.* Fig. 14.

Ut B eſt ad C, ita (*a*) poteſt Q eſſe ad aliquam quampiam S. Jam quia ut B ad C, ſic (*b*) R eſt ad O, & ut B ad C, ſic Q eſt ad S; (*c*) erit R ad O, (*d*) ut Q ad S. Igitur permutando (*e*) R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut (*f*) A ad B, & Q eſt ad S, (*g*) ut B ad C; ex æquo erit O ad S, ut (*h*) A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt ad S. Ergo etiam (*i*) R eſt ad Q, ut A ad C.

Vocatur a Geometris hæc ratio *perturbata*.

[Coroll. *Sint tres quantitates A, B, C, tribus R, O, Q proportionales, bina binis, ſed perturbate; hoc eſt, ſit A:B.:O: Q; & B:C::R:O; ſi A fuerit major quam B, erit ex æquo R major quam Q; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Nam per hanc prop. erit A:C::R: Q; & permutando, A:R:: C: Q. Ergo per 14. hujus libri liquet propoſitum. Hæc vero eſt prop. 21. prius omiſſa.*]

(a) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(b) *Per hyp.*
(c) *Per conſtr.*
(d) *Per* 11. *l.* 5.
(e) *Per* 16. *l.* 5.
(f) *Per hyp.*
(g) *Per conſtr.*
(h) *Per præc.*
(i) *Per* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F; erit quoque (*k*) invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A ſit ad B, (*l*) ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit (*m*) ut A ad I, ſic C ad L. Igitur (*n*) componendo, ut AI eſt ad I, ſic CL eſt ad L: I vero eſt ad B, (*o*) ut L ad F. Rurſum igitur (*p*) ex æquo AI eſt ad B, ut CL ad F.

(K) *Per ſch. p.* 16. *l.* 5.
(l) *Per hyp.*
(m) *Per* 22. *l.* 5.
(n) *Per* 18 *l.* 5.
(o) *Per hyp.*
(p) *Per* 22. *l.* 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16. *SI quatuor magnitudines (AB, CF, I, L) fuerint proportionales; maxima (AB) & minima (L) duabus reliquis (CF, I) majores erunt.*

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maxima AB ſumatur AQ æqualis I; & ex CF ſumatur CR par minimæ L. Erit igitur AB tota ad totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo reliqua QB eſt ad reliquam (*a*) RF, ut tota AB ad totam CF. Sed AB major (*b*) eſt quam CF. Ergo & QB major quam RF. Jam vero quia AQ ipſi I, & CR ipſi L æquales ſunt; etiam AQ cum L, ipſi I cum CR æquales erunt. Quare ſi ad AQ cum L addatur majus QB, & ad I cum CR addatur minus RF; erit totum AQB cum L majus toto I cum CRF. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 19. l. 5.
(b) Per hyp.

Fig. 6. [Corol. *Si tres magnitudines, A, B, C, fuerint proportionales, extremarum ſemiſumma media major erit. Cum enim* (c) *ſit A ad B ut B ad C, erit (per hanc pr.) ſumma extremarum A & C major quam B bis ſumpta, &* (d) *proinde ſemiſumma extremarum major erit quam B ſemel ſumpta.*]

(c) Per def. 8. l. 5.
(d) Per axio 6. l. 1.

Quæ ſequuntur non ſunt propoſitiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, aliiſque deſumptæ, ob frequentem earum uſum Euclideis ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17. *SI prima (A) ad ſecundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit* invertendo *(B) ſecunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam.*

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam C ad F: Igitur A ad (*e*) aliquam BX (quæ (*f*) major erit quam B) eamdem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igitur erit BX ad A, ut F ad C; [*Sed B eſt ad A in minori* (g) *ratione quam BX ad A;*] ac proinde (*h*) B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

(e) Per axio. ante 1. l. 5.
(f) Per 10. l. 5.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per ſch. p. 11. l. 5.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori: hoc eſt, ſi B ad A minorem habeat rationem quam F ad C; habebit invertendo, A ad B majorem rationem quam C ad F.*]

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

S*I A habet ad* **B** *majorem rationem quam C ad F; etiam* permutando *A ad C majorem rationem habebit*, *quam* B *ad* **F**. *Fig.* 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F; erit (*a*) ratio A ad aliam BX (quæ neceſſario major eſt quam (*b*) B) æqualis rationi C ad F. Jam igitur (*c*) permutando A erit ad C, ut BX ad F. Sed BX ad F eſt in majori ratione, (*d*) quam B ad F. Ergo (*e*) etiam A eſt ad C in majori, quam B ad F.

Scholium. Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

(a) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(b) *Per* 10. *l.* 5.
(c) *Per* 16. *l.* 5.
(d) *Per* 8. *l.* 5.
(e) *Per ſch p.* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXVIII.

S*I AB ad BC majorem rationem habet*, *quam FI ad IL*; *etiam* componendo *AC ad BC majorem rationem habet*, *quam FL ad IL*. *Fig.* 18.

Quoniam ponitur AB ad BC eſſe in majori ratione, quam FI ad IL: Ergo (*f*) alia OB (quæ neceſſario erit minor (*g*) quam AB) eſt ad BC, ut FI ad IL. Ergo (*h*) componendo OC eſt ad BC, ut FL ad IL. Ergo AC eſt ad BC in (*i*) majori, quam FL ad IL.

Scholium. Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

(f) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(g) *Patet ex* 10. *l.* 5.
(h) *Per* 18. *l.* 5.
(i) *Per* 8. *l.* 5. & *ſch. h.* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIX.

S*I AC ad BC majorem rationem habet*, *quam FL ad IL*; *etiam* dividendo *AB ad BC majorem habet rationem*, *quam* FI *ad IL*. *Fig* 18.

Quia ponitur AC ad BC majorem habere rationem, quam FL ad IL; Ergo (*k*) alia OC (quæ neceſſario minor erit (*l*) quam AC) erit ad BC, ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo (*m*) OB ad BC, ut FI ad IL. Ergo AB eſt ad BC in (*n*) majori, quam FI ad IL.

(K) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(l) *Per* 10. *l.* 5.
(m) *Per* 17. *l.* 5.
(n) *Per* 8. *l.* 5. & *ſch. p.* 11. *l.* 5.

Scholium. Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18.

SI AC ad BC majorem rationem habet, quam FL, ad IL; convertendo *habebit AC ad AB minorem, quam FL ad FI.*

Quoniam AC eſt ad BC in majori, quam FL ad IL; erit dividendo (*a*) AB ad BC in majori, quam FI ad IL. Ergo invertendo (*b*) CB ad BA, eſt in minori, quam LI ad IF. Ergo componendo (*c*) CA eſt ad BA in minori, quam LF ad IF.

(a) Per 29.l.5. (b) Per 26.l.5. (c) Patet ex 28.l.5.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori: hoc eſt, ſi AC ad AB minorem rationem habeat quam FL ad FI; habebit convertendo, AC ad BC majorem rationem quam FL ad IL.*]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19.

SI AB ad C majorem rationem habet, quam F ad I; & C ad LQ majorem rationem habeat, quam I ad S, & ſic deinceps; etiam [ex æquo] *prima AB ad ultimam LQ majorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.*

Quoniam AB eſt ad C in majori, quam F ad I; Ergo alia (*d*) quæpiam OB (quæ neceſſario minor (*e*) erit quam AB) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad LQ in majori quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit neceſſario major quam LQ) eſt ut I ad S. Igitur ex æquo (*f*) OB eſt ad LR ut F ad S. Ergo OB eſt ad LQ in majori quam (*g*) F ad S. Ergo AB eſt ad LQ (*h*) in multo majori, quam F ad S.

(d) Per. axio. ante 1.l.5. (e) Per. 10.l.5. (f) Per 22.l.5. (g) Per 8.l.5. (h) Per. eamd.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.*

Coroll. *Ex hujus prop. demonſtratione liquet, quod ſi AB ad C majorem rationem habeat quam F ad I; & C ad LR eamdem habeat rationem quam I ad S; etiam prima AB ad ultimam LR majorem rationem habebit quam prima F ad ultimam S. Idemque ſimiliter verum eſt de proportione minori.*]

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXII.

SI *AB ad C majorem rationem habet, quam I ad S; & C ad LQ majorem quam F ad I; etiam* ex æquo [perturbate] *habebit majorem rationem AB ad LQ, quam F ad S.* Fig. 19.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de portione minori. Et ab hac propoſitione, corollario illi quod a prop. præcedente deducitur, ſimile corollarium deducetur.*]

PROPOSITIO XXXIII.

SI *tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quam ablata (CB) ad ablatam (LI,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (AC) ad reliquam (FL.)* Fig. 22.

Quia AB eſt ad FI in maiori, quam CB ad LI; erit (*a*) permutando etiam AB ad CB in maiori, quam FI ad LI. Ergo convertendo (*b*) AB eſt ad AC in minori, quam FI ad FL. Ergo etiam permutando (*c*) AB eſt ad FI, in minori, quam AC ad FL. (a) Per 27.l.5. (b) Per 30.l.5. (c) Patet ex 27.l.5.

[Scholium. *Eodem modo, ſi tota ad totam minorem rationem habuerit quam ablata ad ablatam; tota ad totam majorem rationem habebit quam reliqua ad reliquam.*]

PROPOSITIONES XXXIV.

SI *rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ aut triplicatæ & ſic deinceps; æquales ſunt etiam ipſæ.* Fig. 20.

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B; erit (*d*) ut A ad B, ſic B ad C. Ob eamdem cauſam erit ut E ad F, ſic F ad O. Cum ergo ſit ut A ad B, ſic per hyp. E ad F; & ut B ad C, ſic F ad O, (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O,) igitur (*e*) ex æquo erit, ut A ad C, ſic E ad O. (d) Per def. 10.l.1. (e) Per 22.l.5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 10.

Rationes æquales A ad C & E ad O, ſint duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps, rationum A ad B, & E ad F: etiam hæ æquales erunt.

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ (*a*) ſunt rationes A ad C, & E ad X; etiam ratio E ad X æqualis erit (*b*) rationi A ad C, hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo (*c*) æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, ut E ad F ſeu Z. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per def. 10. l. 5.*
(b) *Per præc.*
(c) *Per 9. l. 5.*

Ex contradictorio aſſertionis, directe illata eſt aſſertio.

PARS SECUNDA.

Euclidea per multiplices definitio æqualium rationum demonſtratur: exhibeturque ac demonſtratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis, methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut quod ſecundo loco ſupra promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod a nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æque multiplices, conſequentium æque multiplicibus, ſemper ſunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cum ſatis ardua, atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam reipſa cognoſcemus, facile apparebit præpoſtere egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium ſumi voluit ex hoc multiplicium indemonſtrata hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma

Lemma 1.

SIT A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium A, C, quælibet æque multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F quælibet æque multiplices L, R. *Fig.* 11.

Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R. [*Eſt prop.* 4. *hujus libri, quæ in parte prima omittitur.*]

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F; etiam I dupla ipſius A erit ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F, & ſic in infinitum. Quod quidem æque eſt per ſe clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F; erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F: Et ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, quam axioma quodcumque. Liquet ergo propoſitum.

[Aliter, *ex prop.* 16. 15. & 11. *l.* 5.

Cum ſit A : B :: C : F ; permutando erit A : C :: B : F. Sed per 15. *eſt A : C :: I : Q ; & B : F :: L : R. Ergo per* 11. *eſt I : Q :: L : R ; & permutando, I : L :: Q : R.*]

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem menſuram C; erit A toties ſumpta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumptæ, quoties C eſt in A. *Fig.* 12.

Ponatur C contineri in B quater, & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4. C, & A eſſe 6. C. Igitur 6. C. (hoc eſt A) ducta in 4, (hoc eſt, toties ſumpta quoties C eſt in B.) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc eſt B) ducta in 6, (hoc eſt, toties ſumpta quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties ſumpta quoties C in B æquatur B toties ſumptæ quoties C in A.

Theorema 1.

SI ratio AB ad FI major ſit ratione L ad R; tales ſumi poſſunt antecedentium (AB & L) æque multiplices, tales item æque multiplices conſequentium (FI & R,) ut multiplex antecedentis (AB) rationis *Fig.* 13.

tionis majoris, excedente multiplam conſequentis (FI;) *multiplex antecedentis* (L) *rationis minoris, non excedat multiplicem ſui conſequentis* (R.)

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & ſint AB & L, majores rationum termini. Quoniam igitur AB ad FI majorem habet rationem quam L ad R; alia quædam qnantitas Z (*a*) habebit ad FI eamdem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad FI æqualis eſt rationi L ad R, poniturque ratio AB ad FI major ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad FI major ratione Z ad FI, ac proinde AB major eſt quam Z: quæ omnia per ſe ſunt manifeſta. Igitur ex AB ſumi poterit AC per Z; eritque etiam AC ad FI, ut L ad R. Auferatur reſiduum BC ex AC quoties poteſt, puta ter; tum ſeca AC in tot æquales partes, exem. gr. in 6. donec earum una poſſit auferri ſæpius ex FI, quam BC ex AC, puta quater, & reſiduum eſto OI, quod erit minus una particula. Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ a proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas eſto Q.

(a) *Per* *a. 10. ante* *l. 5.*

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties ſumpta, quoties Q eſt in FO, nempe quater, æquatur FO toties ſumptæ, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum OI eſt minus una particula, hoc eſt quam Q, erit OI toties accepta, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies, adhuc minor quam AC. Ulterius, quia BC minus ſæpe auferri poteſt ex AC, quam Q ex FI, (poſitum quippe fuit BC ex AC auferri tantum poſſe ter, Q vero quater ex FI;) manifeſtum eſt BC toties ſumptum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quam AC, ac proinde multo majus eſſe quam OI ſumptum ſexies, quod oſtendi ſupra eſſe minus quam AC. Atqui oſtenſum eſt AC ſumptum quater, & FO ſumptum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi AC ſumpto quater addatur BC quater, & ad FO ſexies ſumptum addatur OI ſexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc eſt 4. AB majora, quam 6. FO & 6. OI, hoc eſt quam 6. FI. Quia vero 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora quam 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur ſupra L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quam 6. R. Acceptæ ſunt igitur antecedentium AB & L æque multiplices, nempe quadruplæ, item æque multiplices conſequentium FI & R, nempe ſextuplæ, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB,) ſuperare multiplicem conſequentis

ſequenti FI (nempe 6. FI:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L,) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

SI antecedentium (A, C) qualibet æque multiplices, quibuslibet conſequentium (B, F) æque multiplicibus, ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit. Fig. 11.

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æque multiplices, item tales conſequentium B, F æque multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F; quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus eæ ſolum propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æque ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æque multiplices, itemque tales æque multiplices conſequentium (Q, S,) ut multipla antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S,) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione altera (R ad S.) Fig. 14.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales; quæcumque antecedentium æque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuſcumque æque multiplicibus conſequentium, vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, vel ſimul æquales; quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim.

Quod

Digitized by Google

Quod autem ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis, multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi poſſunt antecedentium R & O æque multiplices, taleſque item æque multiplices conſequentium S ad Q, ut multipla antecedentis R rationis majoris excedente multiplam conſequentis S. multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facile ex 1. lem. oſtenditur,) ut multipla O excedente multiplam Q, multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum evertat hypoteſim.

Theorema 4.

Fig. 15. *CUM proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumptæ, ac proinde eamdem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales; ſimultaneo exceſſui & defectui æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infallibile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediate, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, prius rite intellecta.

Verum quia indicium per multiplices, quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hic aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema

Digitized by Google

Theorema 5.

SI conſequentes (CF, NQ,) & conſequentium qualibet aliquotæ ſimiles, (puta & decimæ, & centeſimæ, & milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali ſemper numero contineantur, rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) æquales erunt. Fig. 16.

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cum, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrimque numerus ablatarum.

Demonſt.. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF, major ratione GM ad NQ. Quoniam igitur AB ponitur ad CF majorem habere rationem quam GM ad NQ, manifeſtum eſt aliquam (puta AD) minorem quam AB, æqualem habere rationem ad CF, quam GM ad NQ. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius CF aliquotam (ex. gr. unam trigeſimam) eſſe minorem differentia DB. Sit CE una trigeſima ipſius CF, & auferatur ex AB quoties poteſt exemp. gr' millies, totumque ablatum ſit AO. Quoniam igitur AO eſt 1000. CE, & CF eſt 30. CE, erit AO ad CF ut 1000. ad 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP, ſimilis alteri CE, nempe etiam una trigeſima. Quia ex hyp. CE, NP æquali numero in AB, GM continentur, & CE ablata ex AB quoties potuit, ablata fuit millies, etiam NP ex GM auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum GK eſt 1000. NP, & NQ eſt 30. NP, erit GK ad NQ ut 1000. ad 30. hoc eſt, ut AO ad CF. Quia vero CE ablata ex AB quoties potuit, reliquit OB, erit OB minus quam CE. Sed CE, nempe una trigeſima CF, eſt minor poſita quam DB. Ergo OB eſt multo minor quam DB. Ergo AO eſt major quam AD. Ergo AO ad CF, majorem rationem habet quam AD ad CF. Sed ponebatur eſſe AD ad CF, ut GM ad NQ. Ergo AO ad CF majorem rationem habet, quam GM ad NQ: hoc eſt, multo majorem quam GK ad NQ. Quod eſt abſurdum, quia oſtendi ſupra AO eſſe ad CF ut GK ad NQ. Non poſſunt igitur rationes datæ AB ad CF & GM ad NQ eſſe inæquales. Æquales igitur ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Theorema

Theorema 6.

Fig. 26. *SI aut conſequentes (CF, NQ,) aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ (ex. gr. decimæ,) inæquali numero in antecedentibus (AB, GM) contineantur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) inæquales erunt, & erit illa major, cujus conſequentis aliquota ſæpius continetur.*

Contineatur CE decima una ipſius CF, in AB millies, & ſit AO, 1000. CE; tum vero reſiduum OB erit minus quam una CE. Deinde NP una decima NQ, contineatur in GM, tantum nongenties nonagies ſepties, & ſit GK, 997 NP; patet reſiduum KM fore minus una NP, ac proinde 1000 NP fore majores quam GM. Sit ergo GR, 1000. NP. Quoniam igitur AO eſt 1000. CE, & GR, 1000. NP; CF vero, 10. CE, & NQ, 10. NP, erit AO ad CF, ut GR ad NQ. Ergo AB eſt ad CF in majori ratione, quam GR ad NQ; ac proinde in multo majori, quam GM ad NQ. Quod erat demonſtrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales inæqualeſque certo liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non ſint, l. 5. propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multo expeditius demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas ea methodo, qua in prima parte uſi jam ſumus, proponere.

TER-

Digitized by Google

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis diviſio.

PRima diviſio eſt in rationalem & irrationalem, ut dictum def.4. Rationalis dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens.

Ratio multiplex eſt, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tipla, quadrupla.

Ratio ſuperparticularis eſt, quando major minorem continet ſimul, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3. ad 2. vel 6. ad 4. quæ dicitur ſeſquialtera, quia major minorem continet ſemel & ejus dimidium: ratio 4. ad 3. ſive 16. ad 12. quæ dicitur ſeſquitertia, quia major minorem continet ſemel, & tertiam ejus partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpartiens eſt, cum major minorem continet ſemel & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8. ad 5. vel 14. ad 10 quia 8. continet 5. ſemel, & inſuper 3. hoc eſt tres quintas ejuſdem numeri 5. quæ tamen ſimul ſumptæ non conficiunt unam aliquotam ipſius 5. Similiter 14. continet 10. ſemel, & bis 2. hoc eſt, duas quintas numeri 10. quæ tamen ſimul ſumptæ (nempe 4.) non conficiunt unam aliquotam ipſius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, quia alias eſſet ratio ſuperparticularis.

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cum major minorem aliquoties continet, & inſuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. ad 2. 10. ad 4. &c.

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8. ad 3. 16. ad 6. &c.

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt, qui diſtinctè & clare exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut major ad minorem; ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27. ad 9. denominator eſt 3. quia 3. ita eſt ad unitatem, ut 27. ad 9. ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cujuſcumque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem, nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad minorem.

Exempl. Detur ratio 60. ad 6. Divide 60. per 6: quotiens 10. eſt denominator. Detur rurſum ratio 60. ad 16. diviſio 60. per 16 fit quotiens $3\frac{3}{4}$ hic eſt denominator.

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUM rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes; communis conſequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Id quod egregie obſervavit P. Gregorius a S. Vincentio, operis ſui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclariſſimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit; tum inprimis libro 8. ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut novam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri merito debeat. Datæ

Fig. 27. ſint

ſint rationes irrationales A ad B, & C ad D, quæ revocentur ad rationes FH, GH, habentes commune conſequens H, ſic ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc eſt rationum A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quomodo una ratio ſeſe habeat ad alteram. Sicut enim F eſt ad G, ita ratio FH eſt ad rationem GH, hoc eſt ratio AB ad rationem CD.

I V.

Axiomata.

AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H,) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) Eſt prop. 2. P. Gregorii a S. Vinc. l. 8. quadr. *Fig. 18.*

Hoc eſt, ratio G ad H, tanto major eſt ratione F ad H, quanto G major eſt quam F.

Ax. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter ſe habent conſequentium proportionem. Eſt propoſ. 7. P. Gregorii a S. Vinc. lib. 8. quadr. *(Fig. 19.*

Hoc eſt, ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciproce eſt M conſequens, ad conſequens L: ſive ratio I ad L tanto major eſt ratione ejuſdem I ad M, quanto L fuerit minor quam M, ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12. ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum denominatores ſunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. (a) denom. ratio 12. ad 3. eſt eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. eſt eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$. ad 1. Sed ratio 4. ad 1. eſt ad rationem $2\frac{1}{2}$. ad 1, ut (b) 4. eſt ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. eſt ad rationem 15. ad 6, ut denominator 4. eſt ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

(a) *Num. 2.*
(b) *Per axio 1. hic.*

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum ſumma ad unitatem, eſt rationum datarum ſumma quæſita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & $2\frac{1}{2}$ additi ſibi mutuo, faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$. ad 1. eſt par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a majore; nam ratio reſidui ad unitatem, eſt ratio quæ remanet poſt minorem rationem a majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatores ſunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$. a majori 4. remanet $\frac{3}{2}$. Ratio $\frac{3}{2}$. ad 1. eſt ea quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. ſeu $2\frac{1}{2}$. ad 1. detraxeris ex ratione 12. ad 3. ſeu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 10. RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune conſequens (H.) Antecedentia F & G ſibi addita ſunt FG. Ratio FG ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a majori F: ratio enim reſidui ad H, eſt ea quæ remanet poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris a ratione F ad H, ſeu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio & Diviſio.

DEnominatores rationum per invicem multiplicati, dabunt denominatorem rationis quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc

Hoc eſt, ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, eſt ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex Ax. 1. & 3. Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpius repetita. Hanc autem perfici repetita ſæpius antecedentium additione, (hoc eſt multiplicatione,) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 20. ad 4. denominatores 3.& 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (ſeu 3. ad 1.) & 20. ad 4. (ſeu 5. ad 1.) producitur.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, eſt ea quæ habetur ex diviſione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3. axiomate; cum rationis per rationem diviſio, ſit ſubtractio unius ab altera ſæpius repetita.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ ſint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. *Fig. 31.*

Hæc operatio eſt Gregorii a S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonſtratione numeri 12. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erit demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

Data ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens, *Fig. 31.*

Digitized by Google

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12. ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De compoſitione rationum: Ejus Definitio.

RAtio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quoſcumque quarum denominatores ſint 2. 3. $1\frac{1}{4}$ Multiplica denominatorem 2. per 3. denom. fit 6. denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6. ad 1. eſt compoſita ex rationibus 6. ad 3. & 12. ad 4. Quod ſi denominatorem 6. multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$ fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2. 3. $1\frac{1}{4}$.

X I.

Compoſitio rationum non aliud eſt quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur ex quarum multiplicatione producitur.

NAM ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7, ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſequens commune. Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clarius percipiatur, obſervandum eſt, multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum, ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per magnitudinem dicitur multiplicari, cum, ut quæpiam recta pro unitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus eſt ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur: ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi; quando aſſumpta quantitate aliqua pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XI.

Si fuerint quæcumque & quotcumque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio prima ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt a Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius a S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quæ inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcumque & quotcumque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. *Fig. 32.*

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denomi-

(a) *Per n. 3.* natores ſunt A, X : & conſequens commune B, (*a*) munus explet unitatis, quæ eſt commune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit (*b*) facere ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A, plane ac ſi cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.

(b) *Per ſch. preced.*

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio (*c*) hujus producti Z ad B unitatem, ſeu commune conſequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7. oſtendimus evenire, in qua ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt quæ fit ex rationum multiplicatione.

(c) *Per defin. num. 10.*

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia vero per conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt, per conſtr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed jam oſtenſum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demon-

Demonſtratur in numeris.

8 2 $\frac{8}{3}$ EAmdem prorſus demonſtrationem valere
4 1 $\frac{4}{3}$ in numeris jam oſtendam, unde etiam
3 $\frac{3}{4}$ 1 veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

Dati ſint tres numeri quicumque exempl. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita 1. ad 2. & ut 4. ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter ſe æquales; eritque ex æquo (*a*) etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$. (a) *Per 22. l. 5.*

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$ eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{3}{4}$ (hoc eſt, rationes 8 ad 4 & 4 ad 3,) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt (*b*) rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$ hoc eſt, fiat, ut 1 ad $\frac{4}{3}$ ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt 1 $\frac{2}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus producti $\frac{8}{3}$. ad 1. eſt ea, (*c*) quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Jam vero quia per conſt. ut 1. eſt ad $\frac{4}{3}$ ita 2. eſt ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inverſim $\frac{8}{3}$ ad 2. ut $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rurſum per conſt. $\frac{4}{3}$. ſunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$. ſunt ad 2. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$ ſunt ad 1. ut 2 ad $\frac{3}{4}$. Sed jam oſtendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. eſſe eam quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio 2. ad $\frac{3}{4}$. eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed oſtenſum eſt ſupra rationem 2. ad $\frac{3}{4}$, parem eſſe rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8. ad 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Igitur per num. XI. ratio 8 ad 3. ex rationibus 8. ad 4. & 4. ad 3. compoſita eſt. Quod erat demonſtrandum. (b) *Patet ex num. 2.* (c) *Patet ex num. 7.*

8 Eodem modo demonſtrabitur ſi plures dentur nume-
4 ri quam tres, rationem 8 ad 25 componi ex rationibus
3 8 ad tria, (hoc jam eſt, ex rationibus 8 ad 4. & 4. ad
25 3) & ex ratione 3 ad 25: & rationem 8 ad 73 compo-
73 ni ex rationibus 8 ad 25 (hoc jam eſt ex rationibus 8 ad 4; 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25 ad 73, & ſic in Infinitum.

XIII.

Si dentur quotcumque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus compoſita.

Fig. 33. SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H; & ut C ad D, ita H ad I; & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonſtravimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 33. INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, ſive illæ ſint continue proportionales ſive non; ratio primæ G ad ultimam K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis ſit compoſita. Nam ex iis componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut oſtenſum eſt num. XI. Cum igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter ſe multiplicatis, ut ex demonſtratione num. 12 patet, non poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumptæ æquales eſſe rationi G ad K, niſi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eamdem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ ſibi mutuo addendæ, ut traditur num. 5. & 6. ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ fere ſemper, ut dixi, erit diverſa ab illa, quæ ex earumdem rationum compoſitione, hoc eſt, multiplicatione exſurget.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER SEXTUS.

PRoportionum doctrina libro quinto univerſim expoſita, in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt quæ hoc libro traduntur adeo ſcitu neceſſaria, ut ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſque ſuaves Matheſeos percipere nemo poſſit. Ad propoſitiones prope ſingulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas eſt.

INcipit autem Liber hic Sextus egregiam illam de proportione Geometrica doctrinam nuperrime expoſitam, uſibus variis planeque præſtantiſſimis applicare: & a triangulis, figurarum ſimpliciſſimis exorſus, eorum latera & areas, prout ad ſe invicem proportione quadam reſpondent, inveſtigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit; & quo eaſdem modo in ratione data augeamus aut minuamus, oſtendit. Regulam etiam Auream ſive proportionalem, totius arithmeticæ palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantum quadratum ſed pentagonum, hexagonum, & univerſim polygonum quodcumque ab hypotenuſa deſcriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuſcumque polygonis ſimilibus a duobus lateribus deſcriptis, demonſtrat. Poſtremo facillima certiſſimaque tum lineas tum ſuperficies tum corpora menſurandi principia, in omnibus Mathematicarum ſcientiarum partibus utiliſſima proponit.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quæ ſunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Ut

Fig. 8. l. 6. Ut triangula X, Z dicentur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L, atque inſuper ſi AB ſit ad FI, ut BC ad LI; & BC ad LI, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI; [*vel ſi,* (a) *permutando, AB ſit ad BC, ut FI ad IL; & BC ad CA,* *(a) Per 16. l. 5.* *ut IL ad LF; & CA ad AB, ut LF ad FI;*] Comparando ſemper latera æqualibus angulis oppoſita [*vel quæ inter æquales angulos, vel quæ circa æquales angulos exiſtunt.*] Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur

Fig. 39. 2. Reciprocæ figuræ ſunt, cum in utraque antecedentes & conſequentes rationum termini [*reciproce*] fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
ſi AC ſit ad CB,
ut FC ad CL.

Antecedentia ſunt AC & FC, quorum in utraque figura unum eſt; [*hoc eſt, AC in X, FC in Z:*] & conſequentia ſunt CB & CL, quorum ſimiliter in quaque figura unum eſt; [*ſed inverſo ordine; nempe CB in Z, CL in X:*] parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

[*Porro, quatuor quantitates, A, B; C; B, ſunt reciproce proportionales, ſi fuerit prima ad tertiam ut quarta eſt ad ſecundam; vel ſi prima fuerit ad quartam ut tertia eſt ad ſecundam: nempe, ſi A:C::D:B, vel ſi A:D::C:B, erunt A, B, C, D. reciproce proportionales.*]

Fig. 1. 3 Altitudo figuræ eſt perpendicularis AQ, a vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidi 4.

Ut trianguli ABC altitudo eſt perpendicularis AQ, a vertice cadens in baſim BC, vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem & vertex aſſumuntur ad libitum.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eamdem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Ut ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia vel quarta, &c.

[*Et ſegmenta circulorum ſimilia ſunt, quæ arcus ſimiles habent. Idem intellige de ſectoribus ſimilibus.*

5. *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum harum exponentes in ſe invicem multiplicati, illius exponentem producunt. (Rationis autem exponens invenitur dividendo antecedentem per conſequentem.)*

Sic

Sic ex rationibus A ad B, & R ad C componitur ratio A×R ad B×S. Nam $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = \frac{A \times R}{B \times S}$ *Vel ſi fiat, ut R ad S ita B ad C; ex rationibus A ad B, R ad S componitur ratio A ad C. Tunc enim* $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = \text{(a)} \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{B \times C}$ (a) Per 30. l. 1.

$= \text{(b)} \frac{A}{C}$ (b) Per 15. l. 5.

Sic duplum tripli eſt ſextuplum: ſic etiam ratio 4 ad 3. componitur ex rationibus 4 ad numerum quemvis, (v. gr. 7.) & iſtius numeri (7) ad 3. Nam $\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$.

Eodem modo liquet, rationem quamvis ex plurimis rationibus componi poſſe. Sic ratio A ad E componi poteſt ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D, & D ad E.]

PROPOSITIO PRIMA.

Triangula (ABC, DEF) & parallelogramma (AOPC, DQRF) quæ eamdem habent altitudinem, ſive inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AC, DF.) Fig. 2.

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imo quidquid uſpiam de figuris ſive planis, ſive ſolidis per proportionem demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. [*vel ex altero illo proportionum æqualium indicio primo & infallibili, quod definitionibus lib. 5. interpoſuit Tacquetus, ante def. 7.*] hunc in modum.

Sumatur baſeos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE ſunt conſequentium (*c*) ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde DG ex baſi AC quoties poteſt, puta ſexies. [*& relinquetur AN ipſa DG minor,*] ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI, &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi DG, etiam ſex triangula CBH, HBI, &c. triangulo DEG æqualia (*d*) erunt ſingula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties

(c) Per def. 7. l. 5.

(d) Per 38. l. 1.

toties triangulum DEG continentur in antecedente ABC. Eodem diſcurſu oſtendam quaſcumque conſequentium (baſeos DF & trianguli DEF) ſimiles aliquotas in antecedentibus, (baſi AC & triangulo ABC,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. [*hoc eſt, per alterum illud proportionum æqualium indicium,*] ut baſis AC ad baſim DF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 14. l. 1. Quoniam vero parallelogramma AP, DR ſunt dupla (*a*) triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter ſe ut baſes.

Corollaria.

Fig. 3. 1. TRiangula (ABC, FIL) & parallelogramma, æquales baſes (AC, FL) vel eamdem habentia, eam inter ſe rationem habent quam altitudines BO, IQ,)

Fiat enim QS, OR æquales æqualibus baſibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter ſe æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR, QIS accipiantur BO, IQ tamquam baſes, erunt OR, QS eorum altitudines: quæ cum ſint æquales, erunt OBR, QIS inter ſe, ut (*b*) baſes BO, IQ. Sed quia ex conſtr. OR par eſt AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur (*c*) triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABC, FIL ſunt inter ſe ut BO ad QI.

(b) Per 1. l. 6.
(c) Per 38. l. 1.

Fig 2. [2. *Triangula (ABC, DEF,) & parallelogramma (AP, DR,) quæ ſunt ut baſes (AC, DF,) eamdem habebunt altitudinem, ſive inter eaſdem parallelas ſtatui poſſunt. Eſt converſa propoſitionis primæ.*

Si enim inter eaſdem parallelas non conſtituentur triangula ABC, DEF; BE non erit ipſi AF parallela. Per punctum igitur E ducatur SE ipſi AF parallela, quæ ſecet CB in S, & jungatur AS. Triangula itaque ASC, DEF, quæ ſunt inter eaſdem parallelas, inter ſe (d) *erunt ut baſes, AC, DF. Sed per hypoth. triangula ABC, DEF ſunt etiam ut AC, DF: ergo* (e) *triangulum ASC æquatur triangulo ABC, pars toti; quod eſt abſurdum. Non igitur per punctum E, ad rectam AF parallela, a recta BF diverſa duci poteſt, ac proinde triangula ABC, DEF, quæ ſunt ut baſes, inter eaſdem parallelas conſtituentur.*

(d) Per hanc prop.
(e) Per 11. & 9. l. 5.

Et cum parallelogramma AP, DR, quæ triangulorum ABC, DEF (f) *dupla ſunt, ſupra eaſdem cum triangulis baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituantur; liquet parallelogramma quæ* (g) *ſunt ut baſes, inter eaſdem parallelas exiſtere.*

(f) Per 41. l. 1.
(g) Per 15. l. 5.

3. *Trian-*

Digitized by Google

3. Triangula (ABC, FIL,) & parallelogramma, quæ inter ſe ſunt ut altitudines (BO, IQ,) baſes (AC, FL) habent æquales. Eſt converſ. coroll. 1. Fig. 3.

Conſtructis enim triangulis OBR, QIS, ut in corollario primo, demonſtrabitur ut ſupra, tri. ABC = tri. OBR, & tri. FIL = tri. QIS. Sed per hypoth. eſt ABC : FIL :: BO : IQ; ergo OBR : QIS :: BO : IQ. Si itaque accipiantur BO, IQ pro triangulorum OBR, QIS baſibus, erunt OR, QS eorum altitudines; & cum iſta ſint ut baſes, altitudines OR, QS (a) *erunt æquales. Sed per conſtr. OR = AC, & QS = FL. Ergo AC, FL erunt æquales.*] (a) *Per cor. 2. hujus.*

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit (FL) parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera, (hoc eſt, AF erit ad FB, ut AL ad GL.) Fig. 4.

Et ſi recta (FL) ſecuerit latera (BA, CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars 1. Ducatur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF, eamdem baſim FL habentia, inter (*b*) ſe æqualia. Ergo triangulum X, ad utrumque eamdem (*c*) habet rationem, hoc eſt, triangulum X eſt ad triang. FBL, ut triangul. idem X eſt ad triang. LCF. Sed triangulum X eſt ad triang. FBL, ut (*d*) AF ad FB: & triangulum X eſt ad triang. LCF, ut (*e*) AL ad LC. Ergo (*f*) etiam AF eſt ad FB ut AL ad LC. Quod erat demonſtrandum.

(b) *Per 37 l. 1.* (c) *Per 7. l. 5.* (d) *Per prec.* (e) *Per camd.* (f) *Per 11. l. 5.*

Pars 2. Ut AF eſt ad FB, ita triangulum X (*g*) eſt ad triangulum FBL; & ut AL eſt ad LC, ita triangulum X eſt ad triang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL eſt ad LC. Ergo triang. X eſt (*h*) ad triang. FBL, ut idem X ad LCF. Ergo (*i*) triangula FBL, LCF, eamdem habentia baſim, æquantur. Ergo FL, BC (k) ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

(g) *Per prec.* (h) *Per 11. l. 5.* (i) *Per 9. l. 5.* (k) *Per 39 l. 1.*

Corollaria.

1. SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures parallelæ (IO, FL,) erunt omnia laterum ſegmenta, proportionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur (*l*) IO, OC. Sed BI eſt ad IF, ut (*m*) QS ad SF. Ergo etiam BI eſt ad IF, ut CO ad OL.

(l) *Per 34. l. 1.* (m) *Per 2. l. 6.*

[Cor. 2.

Fig. 6.

(a) Per cor. poſt. 12. l. 3. (b) Per 31. l. 3. (c) Per 29. l. 1. (d) Per 18. l. 5. (e) Per cor. ſup. 18. l. 5.

[Cor. 2. *Si duo circuli ſe intus tangant, & a tactus puncto ducatur* AB *majoris circuli diameter ſecans circulum minorem in* C, *&* AD *quavis alia recta, ſecans minorem in* E; (a) *erit* AC *diameter minoris: Et erunt diametri ſubtenſis proportionales, & ſic erit etiam differentia diametrorum ad differentiam ſubtenſarum; hoc eſt,* AB: AD:: AC: AE:: BC: DE; *vel permutando,* AC:CB:: AE: ED, *&* AB: BC:: AD: DE; *&* BA: AC:: DA: AE; *Ductis enim rectis* BD, CE *propter angulos* ADB, AEC (b) *rectos, & proinde æquales,* BD, CE *parallelæ* (c) *erunt. Ergo per hanc prop.* AC: CB:: AE: ED, *quod erat unum; & componendo* (d) AB:BC:: AD:DE, *quod erat alterum; & convertendo,* (e) BA: AC:: DA: AE, *quod erat tertium.*]

PROPOSITIO III.

Fig. 7.

SI *recta* (BF) *angulum trianguli bifariam ſecans, etiam ſecet baſim* (AC,) *habebunt baſis ſegmenta* (AF, FC) *eamdem proportionem quam reliqua latera* (AB, CB.)

Et ſi baſeos partes (AF, FC) *eamdem rationem habuerint quam reliqua latera* (AB, CB;) *recta* (BF) *baſim ſecans, angulum oppoſitum* (ABC) *biſecabit.*

(f) Per 5. l. 1. (g) Per 32. l. 1. (h) Per 29. l. 1. (i) Per 2. l. 6.

Pars 1. Produc CB, donec BL ſit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z, latera LB, AB æquantur; anguli (*f*) quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC duobus (*g*) internis L, O æqualis eſt; angulus I, qui per hyp. ipſius ABC dimidius eſt, æquabitur angulo L. Ergo AL, FB ſunt (*h*) parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF eſt ad FC, (*i*) ut LB (hoc eſt AB) ad BC. Quod erat demonſtrandum.

(K) Per 2. l. 6. (l) Per 27. l. 1. (m) Per 5. l. 1.

Pars 2. Produc iterum CB donec LB ſit par AB. Quoniam ponitur ut AF eſt ad FC, ita AB (hoc eſt LB) eſſe ad BC; erunt AL, FB (k) parallelæ. Ergo externus I, eſt par (*l*) interno L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, AB æquales ſunt, anguli (*m*) L & O ſunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales ſunt. Biſectus ergo eſt ABC. Quod erat demonſtrandum.

(n) Per n. 3. ſchol. poſt. 26. l. 1.

[Coroll. *Si recta qua angulum trianguli bifariam ſecat, biſecet etiam baſim, triangulum per hanc prop. erit Iſoſceles, & biſecans recta erit* (n) *perpendicularis baſi.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Triangula ſibi mutuo æquiangula, ſunt ſimilia, hoc eſt, (a) *etiam latera æqualibus angulis oppoſita, habent pro-* (a) *Def. 1.l.6.*
portionalia.

IN triangulis X, Z, angulus A ſit par angulo F, & angu- *Fig. 8.*
lus C angulo L, & angulus B angulo I; Dico AB eſſe ad
FI, ut AC ad FL; & AC eſſe ad FL, ut CB ad LI; & CB
eſſe ad LI, ut BA ad FI. [*Item AB: AC:: FI: FL; & AC:
CB:: FL: LI; & CB: BA: LI: FI.*]

Dem. Si angulus F ponatur ſupra ſibi æqualem A, latera *Fig. 8. & 9.*
FI, FL, cadent ſupra latera AB, AC. Et quia (*b*) angulus (b) *Fig. 9. ſola.*
externus AIL per hypoth. par eſt interno B, erunt (*c*) IL, (c) *Per*
BC parallelæ. Ergo (*d*) BI eſt ad IA, ut CL ad LA Ergo *29.l.1.*
(*e*) componendo BA eſt ad IF ut CA ad LF. Quod ſi an- (d) *Per*
gulus L imponatur angulo C, eodem modo oſtendam AC *2.l.6.* (e) *Per*
eſſe ad FL, ut BC ad IL: & ſi angulus I, imponatur angu- *18.l.5.*
lo B, oſtendetur pari modo, BC eſſe ad IL, ut AB ad FI.
[*& cum antecedentes BA, AC, CB ad conſequentes IF, FL,
LI eamdem rationum habeant; erit* (f) *permutando, BA: AC::* (f) *Per*
IF: FL; & AC: CB:: FL: LI; & CB: BA:: *LI: IF.*] Liquet *16 l.5.*
ergo propoſitum.

Corollaria.

1. SI in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI) erit *Fig 9.*
triangulum LFI ſimile toti CFB; ac proinde CF eſt ad
LF, ut BC ad LI; [*Et permutando FC eſt ad CB, ut FL ad
LI. Item FB ad FC, ut FI ad FL.*]

Nam quia LI, BC parallelæ ſunt, erunt (*g*) externi FIL, (g) *Per*
FLI, pares internis B & C: F vero utrique triangulo eſt com- *27.l.1.*
munis. Ergo ſunt æquiangula. Ergo latera CF, LF oppo-
ſita æqualibus angulis B & FIL, ſunt (*h*) proportionalia late- (h) *Per*
ribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F. [*Item,* *hanc.*
latera circa communem (i) *angulum proportionalia erunt; hoc* (i) *Per*
eſt, FB: FC:: FI: FL.] *def. 1.l.6.*

2. Si in triangulo parallelas AC, LO ſecet recta BF, ab an- *Fig. 10.*
gulo oppoſito B ducta, ſecabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. AF eſt ad LI, ut FB ad IB; & FC
quoque eſt ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF eſt ad LI ut (k) (K) *Per*
FC ad IO. Igitur permutando AF eſt ad FC (*l*) ut LI ad *11 l.5.* (l) *Per*
IO. *16 l.5.*

Fig. 11.

3. *Si inter parallelas* AB, CD, *duæ rectæ* EF, GH *ſe invicem decuſſent in* I; *earum ſegmenta* EI, IF; GI, IH *erunt proportionalia. Triangula enim* EIG, FIH; *propter æquales angulos* (a) *oppoſitos ad* I; *atque* (b) *alternos ad* E, F; & *ad* G, H, *erun taequiangula*, & *proinde ſimilia. Ergo* EI : IF :: GI : IH.

(a) Per 15. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.

Fig. 12.

4. E *Corollario primo Turris aut puncti cujuſvis elevati altitudinem per ſolam baculi umbram definire diſcimus. Baculum* FL *ſolo perpendiculariter defige eo loco ubi radius ſolis* XBA *umbram Turris* BZ *definiens, etiam tranſeat per* L. *Erit in triangulo* AZB *linea* FL *altitudini turris* ZB *parallela. Unde ut* AF *diſtantia baculi ab umbræ mucrone, ad* FL *baculi longitudinem; ita* AZ *diſtantia turris ab umbræ mucrone, ad* ZB *altitudinem Turris Et quia tria prima menſurando facile habeantur, habebitur & quartum, Altitudo quæſita.* Q.E.I.

Fig. 13.

5. *Hinc Tabularum quæ Sinus, Tangentes, atque Secantes continent, originem reperimus. Sit enim e. g. Circuli ſemidiameter* AC *partium* 100000: & *Angulus* BAD *graduum* 30. *Quoniam Chorda ſive ſubtenſa graduum* 60 (c) *æqualis eſt* AC *ſemidiametro*; DB *ſinus graduum* 30 *ſemiſſi ſemidiametri ſive* $\frac{1}{2}$ AC (d) *æqualis erit:* & *proinde partes* 50000 *continebit. In rectangulo vero triangulo* ADB, *quadratum* AB (e) *æquale eſt quadratis* AD & BD. *Quadretur itaque ſemidiameter* AB (100000 *in* 100000 *ducendo*) & *ab iſto quadrato quadratum* BD *ſubtrahe: Reliquum erit Quadratum ipſius* AD, *aut coſinus eidem* (f) *æqualis* BF; *e quo extracta radice dabitur linea* BF, *ſeu* AD, *quæ a radio* AC = 100000 *ſubducta, relinquit ſinum verſum* DC. *Deinde per analogiam ſequentem* (g) AD : BD :: AC : CE, *habebitur Tangens* CE. *Et quoniam eſt* (h) AD : AB :: AC : AE; *habebitur etiam ſecans* AE. *Eadem methodo ex* BF *ſinu recto anguli* BAG *graduum* 60, *habebitur ejuſdem anguli ſinus verſus, tangrns* & *ferant. Porro, quia* (Fig. 9. l. 4.) *quadratum circulo inſcriptum eſt* (i) *duplum quadrati radii; ſi radius ſit* 100000, *erit latus quadrati circulo inſcripti* (*hoc eſt, chorda graduum* 90) *æqualis radici quadraticæ numeri* 100000 × 100000 × 2. *Unde innoteſcit dimidium latus, ſeu* (k) *ſinus rectus gr.* 45., *ac proinde ſinus verſus, tangens* & *ſecans. Et univerſaliter, data chordæ arcus cujuſvis ad radium proportione, invenientur arcus dimidii ſinus rectus, ſinus verſus, tangens, ſecans; item coſinus, cotangens* & *coſecans. Qui plura volet, adeat Clariſſ. Walliſii Tractatum* de ſectionibus Angularibus, *Operum Vol. 2. pag.* 533—601.

(c) Per cor. 1 p. 15. l. 4.
(d) Per cor. 1 p. 3. l. 3.
(e) Per 47. l. 1.
(f) Per 34. l. 1.
(g) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(h) Per id.
(i) Per ſch. poſt prop. 6. & 7 l. 4.
(k) Per cor. 1 prop. 3. lib. 3.

Fig. 14 l. 6.

6. *Hinc etiam, ſi ab angulo quovis* A *trianguli* ABC *circulo inſcripti, demittatur ad baſim perpendicularis* AE, & *ducatur circuli diameter* AD; *erit iſta perpendicularis* AE *ad ejuſdem*

Digitized by Google

dem anguli latus unum AC, ut latus alterum AB eſt ad circuli diametrum AD. Nam ducta BD, triangula AEC, ABD ſunt æquiangula; anguli C & D æquales, (a) quia eidem arcui BOA inſiſtunt; anguli (b) ABD, (c) AEC recti, & proinde æquales; Ergo etiam BAD, EAC æquales (d) erunt. Ergo triangula per hanc prop. ſimilia ſunt, & AE : AC :: AB : AD. Q. E. D.

(a) Per 21 l. 3. (b) Per 31 l. 3. (c) Per hyp. (d) Per cor. 9 pr. 32 l. 1.

7. Circuli diametrum AB (ſi opus productam) perpendiculariter ſecet infinita recta EF in C, & in EF ſumpto quovis puncto E extra circulum, jungatur AE circulum ſecans in D: erit ſubtenſa AD ad circuli diametrum AB, ut AC ad AE. Nam ducta recta DB, triangula ADB, ACE ſunt æquiangula: angulus enim A eſt utrique communis, & anguli ad (e) C, D, (f) ſunt recti; unde tertius (g) tertio æqualis eſt, Ergo per hanc prop. triangula ſunt ſimilia, & AD : AB :: AC : AE. Fig. 15.

Si puncta B, C coincidunt, erit circuli diameter media proportionalis inter AD & AE. Erit enim AD : AB :: = AC : AE.]

(e) Per hyp. (f) Per 31 l. 3. (g) Per cor. 9 p. 32 l. 1.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo proportionalia, etiam ſibi mutuo æquiangula erunt. Fig. 16.

Hoc eſt, ſi AB ſit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad RQ, ſic CB ad QF; & ut CB ad QF, ſic AB ad RF: dico angulos antecedentibus oppoſitos æquari angulis qui opponuntur conſequentibus; nimirum C ipſi I; B ipſi F; A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur (h) B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T ſunt æquiangula, erit (i) AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam eſt AB ad RF, ſicut AC ad RQ. Ergo AB eſt ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF (k) æquantur. Pari modo oſtendam æquari QN & QF. Triangula igitur T, S, ſibi mutuo ſunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquantur (l) angulis Z, N, X, hoc eſt per conſtr. angulis C, B, A. Quod erat demonſtrandum.

(h) Per co. 9 p. 32 l. 2. (i) Per præc. (K) Per 9. l. 5. (l) Per 8 l. 1.

Digitized by Google

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. *SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O,) & latera (AB, AC ; RF, RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt ſimilia.*

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N. Igitur anguli quoque (*a*) B & N æquales erunt. Oſtendam, ut in præcedenti, æquales eſſe RF RN. Eſt vero RQ utriſque triangulis S, T communis. Anguli quoque O & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A; X per conſt. O per hyp. Ergo etiam I & F (*b*) æquantur ipſis Z & N. Triangulum igitur S æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt, per conſt. triangulo P. Ergo S, P (*c*) ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per cor. 9 p. 32. l. 1.*
(b) *Per 4. l. 1.*
(c) *Per 4. l. 6.*

[PROPOSITIO VII.

Fig. 8. SI duo triangula (ABC, FIL) unum angulum (B) uni (I) æqualem habeant; & circa alios angulos (A, F) latera habeant proportionalia, (ut ſit BA : AC : : IF : FL) & reliquos angulos (C, L) vel ſimul rectos, vel ſimul acutos, vel ſimul obtuſos : triangula erunt ſimilia.

Si anguli C, L fuerint recti; ob angulos B, I æquales, triangula erunt (d) *æquiangula, & proinde* (e) *ſimilia.*

Si anguli C, L fuerint obliqui, ſed homogenei, (hoc eſt, vel ſimul acuti, vel ſimul obtuſi,) & anguli A, F æquales fuerint; ob angulos B, I æquales, triangula adhuc erunt (f) *æquiangula &* (g) *ſimilia. Ponantur autem A, F inæquales, & ſit A major, & ſuper recta BA ad punctum A, angulo F æqualis fiat BAD, & propter angulos B & I æquales,* (h) *erunt anguli reliqui ADB & L æquales, & triangula ABD, FIL erunt* (i) *ſimilia, & IF : FL :: BA : AD. Sed IF : FL ::* (k) *BA : AC. Ergo AC =* (l) *AD, & in Iſoſcele ACD, anguli ad Baſim C & ADC* (m) *ſunt acuti. Ergo ADB eſt* (n) *obtuſus, & proinde L eſt obtuſus. Sed L eſt angulo*

(d) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*
(e) *Per 4. l. 6.*
(f) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*
(g) *Per 4. l. 6.*
(h) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*
(i) *Per 4. l. 6.*
(k) *Per hyp.*
(l) *Per 9. [illegible] l. 5.*
(m) *Per cor. [illegible] p. 32. l. 1.*
(n) *Per 13. l. 1.*

gulo C homogeneus (a), *& proinde acutus : quod fieri non poteſt : nam eumdem angulum L obtuſum eſſe, oſtenſum eſt prius. Non igitur angulus BAC angulo F inæqualis eſt. Ergo eſt ei æqualis ; & triangula ABC, FIL ſunt æquiangula, & proinde ſimilia. Q. E. D.* (a) Per hyp.

Hanc propoſitionem (a Tacqueto male omiſſam) propter uſus multiplices omnino reſtituendam cenſui.

Corol. 1. *Iiſdem poſitis, erit ang. A = ang. F, & ang. C. = ang. L.*

Corol. 2. *Si duo triangula S, T, unum angulum F uni N æqualem habeant ; & circa alios angulos O, X, latera reſpective æqualia ; & reliquos angulos I, Z vel ſimul rectos, vel ſimul acutos, vel ſimul obtuſos ; triangula erunt æqualia. Sunt enim ſimilia per hanc, & ſchol. p. 7. l. 5. Ergo angulus X angulo O* (b) *æqualis eſt ; & proinde ipſa etiam triangula* (c) *æquantur.* Fig. 16. (b) Per def. 1. l. 6. (c) Per 4. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo (ABF,) perpendicularis (BC) ab angulo recto in baſim ducta, ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles. Fig. 17.

In triangulis ABF & L, angulus F communis eſt, anguli vero ABF, & X per hypotheſim ſunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam (*d*) æquales erunt. Ergo (*e*) triangula ABF & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula ABF & R, angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L ſimilia eſſe, cum æquales ſint anguli I & F ; A & O ; V & X. Quod erat demonſtrandum. (d) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (e) Per 4. l. 6.

Corollaria.

PRimo, BC eſt media proportionalis inter AC, CF. Fig. 17.

Cum enim ſint in triangulis R & L,

æqu. ang. F.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. AC. CB	lat. opp. CB. CF ;

Patet (*f*) AC eſſe ad CB, ut CB eſt ad CF.

2. BF eſt media proportionalis inter AF & CF. Item AB eſt media inter FA & CA. (f) Per 4. l. 6.

Nam in triangulis ABF & L, ſunt

æqu. ang. ABF. X.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. AF. BF.	lat. opp. BF. CF ;

(a) Per 4.l.6. Ergo AF eſt (*a*) ad BF, ut BF ad CF.
Similiter, quia in triangulis ABF & R, ſunt

æqu. ang. ABF. V.	æqu. ang. F. I.
lat. opp. AF. AB.	lat. opp. AB. AC.

Erit rurſum AF ad AB, ut AB ad AC.

Fig. 17. (b) Per 4. l. 6. [3. *In tribus his triangulis ABF, R & L, rectæ æqualibus anguli oppoſitæ proportionales (b) erunt. Unde, ſi primæ rationis termini e triangulo ABF, illi ſecundæ rationis e triangulo R, iique tertiæ rationis ex L ſumantur; erit AB : BF :: AC : CB :: BC : CF. Et rurſum, BA : AF :: CA : AB :: CB : BF. Denique AF : FB :: AB : BC :: BF : FC. Nam hoc modo ratiocinando, termini homologi æqualibus angulis ubique opponentur.*]

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. D*Atam rectam (AB) dividere ſecundum datam proportionem (FI ad IL.)*

Ducatur infinita AZ; ex qua ſume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

[Cor. 1. *Hinc datam rectam AB ita ſecabis, ut tota ſit ad partem abſciſſam BC in data ratione majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, ſi in recta infinita AZ, capiatur AR = FL, & in recta RA capiatur RQ = LI, & jungatur RB, eique parallela ducatur QC.*

Cor. 2. *Hinc etiam, datam rectam AC ſic producere licebit ad B, ut tota producta AB ſit ad partem adjectam BC, in ratione data majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, ſumendo in recta infinita AZ, AR = FL, & in recta RA, RQ = LI, ac jungendo QC, eique parallelam ducendo RB, quæ in recta AC producta, punctum B determinabit.*

Cor. 3. *Hinc denique, datam rectam AC ſic producere licebit, ut ipſa AC ſit ad totam productam in ratione data minoris inæqualitatis, nempe ut FI ad FL; ſumendo in recta infinita AZ, rectas AQ, AR, rectis FI, FL reſpective æquales, & jungendo QC, eique ducendo parallelam RB, quæ in recta AC producta punctum B determinabit.*]

PRO-

PROPOSITIO X.

DAtam rectam (AB) ſimiliter ſecare ut altera data (AI) fuerit ſecta (in F, C.) *Fig. 19.*

Extremitates ſectæ & inſectæ jungat recta I B. Huic ex punctis F, C due parallelas, rectæ ſecandæ AB occurrentes in L & Q. Dico factum.

Patet ex coroll. 1. p. 2. l. 6.

[*Aut etiam, ſi linea ſecta IA ſit major ſecanda BQ, ſint tres circuli ſe mutuo tangentes diametris IF, IC, IA deſcripti; & aptetur ſubtenſa BQ a puncto I ad circumferentiam circuli maximi: circuli duo minores in punctis L, P lineam BQ ſecabunt in* (a) *ratione ſectionum diametri IA. Si linea IA ſecta ſit in partes quatuor, circuli quatuor adbibendi ſunt; ſi in quinque, circuli etiam quinque; & ita in infinitum.*] *Fig 20.* (a) Per cor. 2 p. 2 l. 6.

Scholium.

EX hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotvis æquales partes ſecare. Cum recta ſecanda AB faciat quemvis angulum rectâ quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot ſecare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum. *Fig 19.*

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum. Sit AB triſecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, ſupra vel infra. Ex IX, ſi eſt infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ ſimul majores ſint quam AB, minores vero ſi IX eſt ſupra. Per I & A, item per S & B duc rectas; quæ (*b*) concurrent in C. Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam AB triſecabunt. Demonſtratio patet ex coroll. 2. prop. 4. *Fig. 21.* (b) *Per ſch. p. 33. l. 1.*

Rurſum cum Maurolyco aliter id ipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV, VS, SR, in ſingulis nempe una pauciores, quam deſiderentur in AB: tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatriſecabunt datam AB. *Fig 22.*

Nam quia per conſt. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS, etiam hæ erunt (*c*) parallelæ. Pari modo OS, QV ſunt parallelæ. Ergo cum AQ ſit ſecta in tres æquales partes, etiam erit AI ſecta (*d*) in tres æquales. Similiter *(c) Per 33. l. 1.* (d) *Per cor. 1. p. 2. l. 6.*

militer erit BC ſecta in tres æquales. Tota igitur AB ſecta eſt in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclideâ, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

Fig. 23. Coroll. *Hinc Trapezium ABCD, cujus latera AD & BC ſunt parallela, in partes quotcumque æquales, partiri diſcimus. Producantur enim BC ad E; ut fiat CE æqualis AD. Ob angulos alternos DAF, FEC, & ADF, ECF* (a) *æquales, & baſes AD, CE per conſtructionem æquales, triangula ADF & FCE* (b) *æqualia ſunt; & proinde triangulum ABE Trapezio ABCD æquale. Diviſa* (c) *itaque baſi BE in æquales quotcumque partes, puta tres BG, GR, RE, ductiſque AG, AR, erit triangulum ABG, vel AGR, vel ARE, trapezii pars tertia. Q. E. I.*

(a) Per 27. l. 1. (b) Per 26. l. 1. (c) Per hoc ſch.

PROPOSITIO XI.

Fig. 24. D*Atis duabus rectis* (*AB, BC,*) *tertiam proportionalem invenire.*

Duc rectam AC. Ex BA producta accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB eſſe ad BC ut BC ad CL.

Nam AB eſt ad AF, (*d*) ut BC ad CL. Sed AF eſt (*e*) par BC. Ergo AB eſt ad BC; ut BC ad CL; adeoque CL eſt tertia proportionalis quæ petebatur.

(d) Per 2. l. 6. (e) Per conſtr.

Aliter.

Fig. 25. STatuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc infinitam CX perpendicularem ad AC, cui in L occurrat AB producta. Dico AB eſſe ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

POterit vero proportio data non ſolum per tres terminos, ſed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum ſumma exhiberi. Pulcherrime hanc rem, totumque adeo Geometricæ progreſſionis negotium Gregorius a S. Vincentio proſecutus eſt toto libro 2. ſui operis. Nos in gratiam ſtudioſorum, ſuccinctam rei propoſitæ conſtructionem ac demonſtrationem hic exhibebimus.

Lemma

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quavis data majorem. *Fig* 26. *ſecunda*.

Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur (*a*) invertendo, ut QL ad RL, ſic RL ad OL. Ergo divid. (*b*) QR ad RL, ut RO ad OL: & permut. (*c*) QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL eſt major quam OL. Ergo etiam QR major quam RO. Pari modo oſtendam IQ eſſe majorem quam QR, & ſic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam LO ſemper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuo creſcentes, patet veniri ad quantitatem quavis data majorem. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per ſchol. p.* 16. *l.* 5. (b) *Per* 17. *l.* 5. (c) *Per* 16. *l.* 5.

Lemma 2.

SI ratio quæcumque majoris inæqualitatis AB ad CB ſemper continuetur, ad quantitatem venietur quavis data minorem. *Fig* 26. *utraque*.

Data ſit LO quantumvis parva. Fiat (*d*) ut BC ad BA, ſic LO ad LR. Poterit (*e*) ratio LO ad LR toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, puta LI major quam AB. Quoties vero continuata jam eſt ratio LO ad LR, per totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB. Erit FB minor quam OL.

(d) *Per cor.* 3. *p.* 9. *l.* 6. (e) *Per lem.* 1.

Nam ex conſt. patet IL, QL, RL, OL, eſſe proportionales ipſis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo ut (*f*) IL ad OL, ſic AB ad FB, & permutando (*g*) ut IL ad AB, ſic OL ad FB. Sed IL eſt major (*h*) quam AB. Ergo etiam data OL eſt major quam FB. Quod erat demonſtrandum.

(f) *Per* 22. *l.* 5. (g) *Per* 16. *l.* 5. (h) *Per conſtr.*

Problema.

DAta ſit ratio majoris inæqualitatis AB ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium ſummam exhibere. *Fig.* 27.

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens (*i*) cum ABC producta, in Z. Dico 1. Si ex C erigas perpendicularem CQ; erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige ER;

(i) *Per ſch. p.* 31. *l.* 1.

ER; erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS; erit hæc quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc eſt AL ad BO, per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. ſive AB, BC CE, EF, FI, &c, in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex reſiduo FZ; cum enim LA (hoc eſt AB) ſit minor quam AZ, etiam FS erit (*a*) minor quam FZ.

(a) *Patet ex cor. 1. p. 4. l. 6. & p. 14. l. 5.*

Dico 2. AZ eſt æqualis toti ſummæ infinitarum proportionalium.

1. Pars. AZ eſt ad BZ, ut (*b*) AL ad BO; hoc eſt, ut AB ad BC: Igitur permutando & invertendo, (*c*) AB eſt ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ eſt ad BZ, (*d*) ut BZ ad CZ. Sed ut AZ eſt ad BZ, (*e*) ſic LA eſt ad OB; & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA eſt ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo oſtendam OB eſſe ad QC, ut QC ad RE, & ſic deinceps in infinitum.

(b) *Per idem coroll.* (c) *Per 16. l. 5. cum ſchol.* (d) *Per cor. 2 p. 18. l. 5.* (e) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*

2. Pars. Tota ſumma infinitorum terminorum, neque minor eſt quam AZ, neque major: Ergo æqualis. Non eſt major, quia, cum jam oſtenderim ſupra, QC eſſe minorem quam CZ, & RE quam EZ, & SF quam FZ, & ſic deinceps ſine termino; poterunt omnes termini QC, RE, SF &c, ſine fine conſtitui juxta invicem in recta AZ, ſic ut numquam punctum Z [*quolibet finito terminorum numero*] attingatur; [*neque terminorum ſerie in infinitum continuata, excedi poſſe rectam AZ, exinde patet, quod tota illa ſeries infinita, in AZ poterit transferri; ac proinde ſeries illa non erit major quam AZ.*] Non erit etiam minor quam AZ; quia jam oſtendi ſupra AZ, BZ, CZ eſſe continue proportionales, & eodem modo oſtenditur de reliquis EZ, FZ, IZ, &c. Cum igitur, transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, &c. reſidua EZ, FZ, IZ, &c. ſemper ſint continue proportionalia, ut jam oſtendimus; venietur tandem ad reſiduum (*f*) dato minus; ac proinde ſumma proportionalium ſuperabit quantitatem omnem quæ minor ſit quam AZ: unde ipſa non poteſt eſſe minor quam AZ. Quoniam igitur nec major eſt, nec minor quam AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(f) *Per lem. 2.*

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium ſumma, ſunt continue proportionales.

In ſuperiori figura ducatur OX parallela AZ. Igitur LX erit differentia primi termini AL ſeu AB, & ſecundi BO, ſeu

Fig. 18.

Digitized by Google

ſeu BC. Quoniam XO eſt parallela ad AZ; erit LX ad XO, ut (*a*) LA ad AZ. Sed XO eſt AB, & LA etiam eſt AB. Ergo LX differentia, eſt ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam ſummam. Quod erat demonſtrandum. (a) Per cor. 1. p. 4. l. 6.

Idem univerſaliter & breviſſime demonſtrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continue proportionales quæcumque, (etiam numeri,) AZ, BZ, CZ, &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentiæ, quæ una cum poſtrema quantitate IZ, æquantur primæ AZ. Quia vero, ſi proportionales in infinitum continuentur, poſtrema quantitas per lem. 2. evaneſcit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia eſt AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & ſic deinceps; erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & (*b*) convertendo, ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC ſecunda differentia ad BZ quantitatem ſecundam, & ſic deinceps; Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, (*c*) ita omnes differentiæ (hoc eſt, ut jam oſtendi, prima quantitas AZ,) ad omnes quantitates, hoc eſt, ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum. Fig. 28. (b) Per cor. 1. p. 18. l. 5. (c) Per 12. l. 5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (AB, BC, AF,) quartam proportionalem invenire. Fig. 29.

Diſponantur datæ rectæ, ut figura monſtrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita: Ipſi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB eſſe ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

PUlchre Bettinus noſter in ſuo Ærario Mathematicæ Philoſophiæ, ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum. Fig. 30.

Si tres dentur rectæ; ſecunda CB & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B ſub quovis angulo.

Per

(a) Per 5. l. 1. (b) Per 35. l. 3. Per puncta C, A, D deſcribe (a) circulum, cui AB prima occurat in Z. BZ eſt quarta proportionalis.

Cum enim rectangula ABZ, CBD (b) æqualia ſint, erit AB ad BC, ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.

Fig. 31. Si dentur duæ rectæ AB, BC; ſecundæ BC apponatur in directum BD æqualis BC. Dein ipſam CD in B tangat prima AB ſub quovis angulo. Tum reliqua ut ſupra. Erit BZ tertia proportionalis quæſita.

Demonſtratio ſimilis eſt: cum enim rectangula ABZ, CBD ſint æqualia, erit AB ad BC, ut BD, hoc eſt, ut BC ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 32. *Datis duabus rectis (AC, CB,) mediam proportionalem invenire.*

Tota compoſita AB biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A & B; ex C erige perpendicularem CF, occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC eſſe ad CF, ut CF ad CB.

(c) Per 31. l. 3. (d) Per cor. 1. p. 8 l. 6. Ducantur enim AF, BF. Triangulum (c) AFB rectangulum eſt, & a recto angulo ducta eſt perpendicularis FC in baſim. Ergo AC eſt ad CF, ut (d) CF, ad CB.

Corollaria.

1. Hinc patet, ſi ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta ſit ad diametrum perpendicularis (FC,) eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (AC, CB.)

Cor. 2. *Hinc quoque media proportionalis CE dimidiam extremarum ſummam AO ſuperari nequit; & ſi extremæ fuerint inæquales, media CF erit illarum dimidio minor. Quod etiam ex pr. 25. ſupra deductum erat.*

Scholium ad Cor. 2. Problema. *Data, e tribus proportionalibus, extremarum ſumma AB, & media DE, invenire ipſas extremas. Oportet autem mediam proportionalem DE aſſignari, dimidia AB non majorem, per cor. 2.*

Super diametro AB circulus deſcribatur, quam ad B (utrumlibet diametri extremum) tangat GB data DE æqualis, & per G ducatur GF ipſi AB parallela, quæ, quia DE ſive GB radio circuli non eſt major, circulo occurret in F. A puncto F ad diametrum AB demiſſa perpen-

dicu-

dicularis FC, ipſam AB dividit in extremas quæſitas AC, CB. Nam FC (per cor. 1. hujus) eſt media proportionalis inter extremas AC, CB: eſt autem (per prop. 34. l. 1.) FC = GB, hoc eſt, per conſtr. = DE. Factum eſt igitur quod petebatur. Aritbmetice autem invenientur AC, CB ex iiſdem datis, ſi, ducta OF, ex ejus quadrato = ¼ ABq = Quadr. ½ AB, ſubducatur FCq = DEq, & relinquetur OCq, cujus radix quadratica OC addita dimidiæ AB, & ab eadem dimidia ſubducta, dabit AC, CB quantitates quæſitas.

Cor. 3. *Hinc etiam tres, vel ſeptem, quindecim &c. mediæ proportionales, facili negotio inveniuntur, talis ſcil. quivis mediarum numerus, qui ex continua proportionalium 1. 2. 4. 8. 16. &c. additione oritur; nempe vel unica = 1, vel tres = 1 + 2, vel ſeptem = 1 + 2 + 4, & ſic deinceps.*

Sint quantitates datæ A & E; inter quas media ſit M, per banc pr. inventa: deinde inter A & M fac mediam L, atque inter M & E mediam N: erunt L, M, N, tres mediæ inter A & E. Et ſi porro mediæ proportionales conſtituantur inter A & L, L & M, M & N, N & E babebis ſeptem medias inter A & E. Mediæ vero inter barum ſingulas, una cum ipſis ſemptem intermediis prioribus, conſtituent medias quindecim inter A & E. Atque ita porro.]

Scholium.

HIC locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis ſolutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eutocio in comment, in (*a*) Archim. varii recenſentur ſubtiliſſimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menæchmi, Eratoſthenis, Philonis Byzantii, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P. Gregorius a S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex omnibus viſum eſt tres adſerre raliquis faciliores.

(a) *Comment in theor 1. l. 2. de Sphæra & Cylindro.*

Modus Platonis.

OPorteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. *Fig. 33.*
Ponantur AB, BC ad rectum angulum, & producantur infinite verſus Z & X. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noſter; Plato enim unica norma utitur, ſed (*b*) cujus lateri DE inſerta ſit regula mobilis per DE, [*ipſi perpendicularis;*]) & unius normæ angulus D applicetur

(b) *Vide Fig. 34.*

plicetur rectæ BX, ea lege ut & latus unum tranſeat per A; & ad punctum E, in quo latus alterum ſecabit rectam BZ, applicata norma ſecunda, tranſeat per C. Dico BD, BE duas eſſe medias inter datas AB, BC; hoc eſt, ut AB eſt ad BD, ſic eſſe BD ad BE, & BE ad BC.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, ſic BD ad BE: Et ob eamdem cauſam, ut BD ad BE, ſic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ ſunt duæ mediæ BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byzantii.

Fig. 35.

DUæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum: tum perficiatur rectangulum ABCD, & producantur DA, DC infinite, ducanturque [*rectanguli ABCD*] diametri BD, AC, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod ABCD rectangulum ſit, tranſibit (*a*) per A, D & C. *Cum enim circulus rectangulo* (b) *circumſcribi poterit; puncta A, B, C, D erunt in circuli circumſcripti circumferentia: & propter angulos rectos ABC, BCD, recta AC, BD erunt* (c) *ejuſdem circuli diametri, quarum interſectio E, circuli centrum erit. Circulus igitur, eodem centro E & radio BE deſcriptus, tranſibit per A, D & C.*] Tum regula ſic applicetur ad punctum B, interceptæ BG, OF ſint æquales. Dico AF, GC eſſe duas medias inter datas AB, BC hoc eſt, ut AB eſt ad AF, ſic AF eſſe ad GC, & GC, ad CB.

(a) *Patet ex 11. l. 3.* (b) *Per cor. p 5. l. 4.* (c) *Per 31. l. 3.*

Demonſt. Quia GB, OF (*d*) æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula OGB, BFO, hoc eſt rectangula (*e*) DGC, DFA. Ergo eſt ut GD ad DF, (*f*) ſic reciproce AF ad GC. Sed [*in triangulo FGD, propter BA parallelam baſi GD,*] GD eſt ad DF, (*g*) ut BA ad AF. Ergo (*h*) ut BA eſt ad AF, ſic AF eſt ad GC. Rurſum quia jam oſtendi AF eſſe ad GC, ut BA eſt ad AF; eſt vero BA ad AF, ut GD ad DF, hoc eſt [*propter CB parallelam baſi DF, in triangulo GDF,*] ut GC ad CB; erit (*i*) quoque AF ad GC, ut GC eſt ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, ſunt continue proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

(d) *Per conſtr.* (e) *Per cor. 1. p. 36. l. 3.* (f) *Per 14. quæ ab hac non pendet.* (g) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.* (h) *Per 11. l. 5.* (i) *Per eand.*

Hi duo modi quamvis ſint ingenioſi & faciles; tamen, quia debita normæ & regulæ applicatio non niſi tentando fit, Geometrici non ſunt.

Modus

Modus Carteſii.

PAretur inſtrumentum hujuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B, C, D, E, F, G, ea lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regula YZ, & norma CD impellat normam DE in regula YX, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & ſic deinceps. Dum vero regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolum duæ, ſed etiam quatuor & ſex, imo quotvis mediæ reperiuntur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus ſupradictis inventos obtineri poteſt. Fig 16.

Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & ſit YB, major in regulam alteram YZ, & ſit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dico YC, YD eſſe duas medias inter datas YB, YE; hoc eſt, YB eſſe ad YC ut YC eſt ad YD, & YD ad YE.

Demonſtratio manifeſta eſt ex cor. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura inſtrumenti, in trigono YCD angulus ad C rectus eſt, ab eoque cadit CB perpendicularis in baſim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB eſt ad YC, ſic YC ad YD. Rurſum, quia in trigono YDE angulus ad D rectus eſt, ab eoque cadit perpendicularis DC in baſim YE, erit ut YC ad YD, ſic YD ad YE. Sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continue proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ ſunt duæ mediæ YC, YD. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG tranſeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum ſit Platonico illo operoſius, plane eximius eſt, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imo quotcumque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcumque in data proportione (a) augentur vel minuuntur, quemadmodum id ipſum in figuris planis efficitur (b) per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut ſingularem & unicam, omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.

(a) *Vide ſch. poſt* 18. *l.* 12.
(b) *Vide cor.* 4. *p.* 20. *l.* 6.

[Corol.

Fig. 37 [Corol. *Hinc habetur methodus rationem quamvis minoris inæqualitatis quouſque libuerit continuandi. Detur ratio minoris inæqualitatis AO ad AC, quam per plures terminos continuare oportet. Super diametro AC deſcribe ſemicirculum, cui a puncto A, inſcribe AB=AO, & indefinite producantur AB,*
(a) Per 31.l.3.& def.14.l.1. *AC verſus P & Q. Junge BC, & erige perpendiculares CD, DE, EF, FG, &c. Propter angulos rectos* (a) *ABC, ACD,*
(b) Per cor. 2.p.8. l.6. *ADE, AEF, AFG, &c. erunt* (b) *AB, AC, AD, AE, AF, AG, &c. continue proportionales.*

Fig. 38. *Idem etiam obtinebitur, quamvis angulus ABC non ſit rectus. Occurrant ſibi invicem in quovis angulo BAC, rectæ AB, AC; & producantur ut ſupra, verſus P, Q; jungaturque BC. Tum angulo ABC fiant æquales anguli ACD, ADE, AEF, &c. Et triangula ABC, ACD, ADE, &c. propter illos an-*
(c) Per cor. 9.p.32.l.1. *gulos, & angulum A communem, erunt æquiangula* (c) *&*
(d) Per 4. l.9. *ſimilia* (d). *Ergo AB: AC:: AC: AD:: AD. AE:: AE: AF, &c.*]

PROPOSITIO XIV.

Fig. 39, 40. **P***Arallelogramma æqualia (X, Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt, AC eſt ad CB, ut FO ad OL.)*

Et ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia.

(e) Per 13.l.1. [*Ponantur latera AC, OB ita in directum, ut æquales an-*
(f) Per 14. l.1. *guli C, O, jaceant ad partes contrarias rectæ AB: & propter angulos C, & LCB duobus rectis* (e) *æquales, erunt LCB &*
(g) Per 1. l.6. *O duobus rectis æquales, & proinde FO, CL* (f) *ſunt in directum.*]

(h) Per eamd. 1. Pars. IL & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R, ut AC (*g*) ad CB: & Z
(i) Per 7.l.5. eſt ad (*h*) R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z
(k) Per 11.l.5. æqualia ſunt, X eſt (*i*) ad R, ut Z eſt ad R. Ergo etiam
(l) Per 1.l.6. AC eſt ad CB, ut (k) FO ad OL. Quod erat demonſtrandum.

(m) Per eamd. Dem. 2. pars. Ut AC ad CB, ſic (*l*) X eſt ad R: & ut
(n) Per 11.l.5. FO ad OL, ſic (*m*) Z ad R. Sed jam per hyp. AC eſt ad
(o) Per 9.l.5. CB, ut FO ad OL. Ergo X eſt ad R; (*n*) ut Z eſt ad R. Ergo X & Z æqualia (*o*) ſunt.

[Corollarium. *Hinc pendet regula proportionum inverſæ, ſive reciprocæ demonſtratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum*

tum invenit multiplicando in ſe invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, ut inde habeatur terminus quartus. Sicut enim in regula directa ſpectatur æqualitas rationum, ut ſi fuerit A: B :: C: D, erit $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (*ubi quotus termini primi per ſecundum diviſi, quoto tertii per quartum diviſi æquatur,*) *ita in regula inverſa ſpectatur æqualitas triangulorum, ſive factorum, ita ut rectangulum ſub primo & ſecundo, æquale ſit rectangulo ſub tertio & quarto. Ex. gr. ſi fuerint A, B; C, D reciproce proportionales; (hoc* (a) *eſt, ſi A: C :: D: B,) erit (per hanc prop.)* $A\times B = C\times D$; *& proinde ſi facta iſta æqualia per terminum tertium C dividantur,* (a) *Per def. 2. l. 6.*

exorietur quotus $\frac{A\times B}{C} = D$ *per terminum quartum.*

Sint quantitates AB, BC; LI, IF reciproce proportionales: Fig. 41.

Erit $IF = \frac{AB\times BC}{LI}$. *Ex. gr. ſit AB linea perticarum* 40. *BC pertic.* 4. *Erit* $AB\times BC$, *ſive rectang. X pertic.* 160, *ſive jugerum Anglicum. Proponatur jam jugerum aliud Z, perticas* 16. *longum, ut LI, & quæratur ejus latitudo IF. Ob æqualitatem rectangulorum X & Z, cum rectang. X majorem habeat longitudinem quam ſibi æquale Z, minorē latitudinem habebit; ac proinde* minor *longitudo LI jugeri* Z majorem *latitudinem IF, pro regulæ inverſæ natura, poſtulat. Et æqualibus rectangulis,* $AB\times BC$, $LI\times IF$, *per LI diviſis, orietur quotus*

$$\frac{AB\times BC}{LI}\left(=\frac{40\times 4}{16}=\frac{160}{16}\right) = IF = 10.$$

Ergo jugerum Z latum eſt 10 *perticas. Q. E. I.*

PROPOSITIO XV.

Æqualia triangula (ACL, FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt, AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Fig. 41. 42.

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

[*Ponantur AC, OB in directum, prout in prop. preced. Erunt etiam LC, OF in directum; &*] ducatur recta LB: reliqua demonſtratio eadem eſt quæ præcedentis.

M *Corol-*

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant baſes & altitudines, ſunt æqualia: Et e converſo.

Patet ex duabus præcedentibus, *rectangula parallelogramma* (*Fig.* 39.) *vel triangula rectangula* (*Fig.* 42.) *quæ reciprocant baſes AC, CB, & altitudines OL, OF; æqualia eſſe.*

(a) Per 35. 36. 37. 38. *l.* 1. & *def.* 3. *l.* 6.

Et cum parallelogramma vel triangula obliquangula quæcumque, (a) *æqualia reſpective ſint parallelogrammis vel triangulis rectangulis ſuper eadem baſi vel æquali, & ejuſdem altitudinis; æquabuntur etiam parallelogramma vel triangula quæcumque quæ reciprocant baſes & altitudines.*

[b) Per præced. & hanc. (c) Per 35. 36, 37. 38, *l.* 1. & *def.* 3. *l.* 6.

Et e converſa, cum rectangula parallelogrammo æqualia, & rectangula triang., æqualia. (*Fig.* 39. 42.) *reciprocent* (b) *baſes & altitudines: Et cum parallelogramma & triangula quæcumque, æqualia* (c) *ſint parallelogrammis & triangulis rectangulis ſuper eadem baſi vel æquali, & ejuſdem altitudinis; Liquet æqualia quæcumque parallelogramma, & æqualia quæcumque triangula, baſes habere altitudinibus ſuis reſpective reciprocas.*

Fig. 45.

Scholium. *Sint duo triangula ABC, DBE quorum anguli ad B ſimul ſumpti æquales ſint duobus rectis; ſintque latera circa angulos ABC, DBE reciproca; Erunt triangula iſta æqualia: Si vero triangula fuerint æqualia; latera circa angulos ABC, DBE erunt reciproca. Compleantur enim parallelogramma BF, BG; & propter angulos ad B duobus rectis*

(d) Per 14. *l.* 1. (e] Per 27. *l.* 1. (f) Per hyp. (g) Per 34. *l.* 1. (h) Per def. 2. *l.* 6. (i) Per 14. *l.* 6. (K) Per 34. *l.* 1. (l) Per eand. (m) Per 14. *l.* 1. (n) Per 27. *l.* 1. (o) Per 14. *l.* 6.

æquales, rectæ CB, BE in directum (d) *jacent; & propter parallelas CBE, DF, anguli* (e) *alterni ABC, ADF ſunt æquales: Et quoniam* (f) *eſt AB ad BD, ut EB ad BC; eſt autem EB ipſi DF* (g) *æqualis; erit etiam AB:BD:: DF:BC; hoc eſt, latera circa æquales angulos ABC, BDF* (h) *ſunt reciproca: ergo parallelogramma* (i) *BG, EF ſunt æqualia, & proinde* (k) *eorum dimidia ABC, DBE æqualia erunt.*

Eodem modo, ſi triangula ABC, DBE æqualia ſint, & habeant angulos ABC, DBE duobus rectis æquales; erit AB: BD:: EB:BC. Compleantur enim parallelogramma BF, BG, quæ erunt triangulorum (l) *æqualium dupla, & proinde æqualia; & propter parallelas* (m) *CBE, DF, etiam* (n) *æquiangula: ergo latera circa æquales angulos* (o) *ſunt reciproca; hoc eſt, AB: BD:: DF ſive BE: BC. Q. E. D.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor rectæ (AB, FI, IL, BC) fuerint proportionales; (hoc eſt, ſi AB ſit ad FI, ut IL ad BC;) Rectangulum (X) ſub extremis (AB, BC) æquale eſt rectangulo (Z) ſub mediis, (FI, IL.) Fig. 44.

Et ſi rectang. ſub extremis æquetur rectangulo ſub mediis; erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. eſt AB ad FI, ut reciproce IL ad BC. Ergo (a) X & Z æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum. (a) Per 14.l.5.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponuntur æqualia; Ergo circa æquales angulos B & I, eſt AB ad FI, (b) ut reciproce IL ad BC. Quod erat demonſtrandum. (b) Per eamd.

[Coroll. 1. *Hinc ad datam rectam lineam AB facile eſt datum re tangulum Z applicare: faciendo (c) nimirum AB:FI:: IL: BC, & rectangulum X ſub AB, BC (d) conſtruendo. F ſt enim X dato Z (e) æquale rectangulum ad da am rectam AB applicatum. Idem aliter efficies per cor. & ſchol. p. 44. l. 1.* (c) Per 12 l.6. (d) Per ſchol. p. 46. l. 1. [e] Per hanc prop.

Cor. 2. *Hinc pendes regula proportionum directa demonſtratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum proportionalem invenit, multiplicando ſecundum & tertium in ſe invicem, & factum dividendo per terminum primum. Nam per hanc prop. ſi AB:FI::IL:BC, erit AB×BC=FI×IL, & dividendo æqualia facta per AB, erit*

$$BC = \frac{FI \times IL}{AB}$$

Sic ſi proponatur numeris 5, 3, 10. quartum proportionalem invenire, jubet regula proportionum directa, numeros 3 ac 10. in ſe invicem ducere, ac productum 30 dividere per 5, ut inde oriatur numerus quæſitus 6.

Coroll. 3. *Hinc etiam, demonſtratur regula practica, qua feneſtrarii, aliique ejuſmodi artifices quibus opus eſt areas rectangulas minores dimeiri, rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimenſione, abſque ulla operatione A ithmetica colligere ſolent. Si quæratur v. gr. quot pedes quadratos contineat rectangulum ABCD. ab angulo B, lateri BC applicetur menſura pedis unius BE, & ab angulo A, altero lateris AB termino, per menſuræ pedalis extremum punctum E tendatur filum, quod occurrat lateri DC producto (ſi opus) in F. Quot pedes longitudine, vel partes pedis quaſvis contineat recta D , tot pedes* Fig. 45. & 46.

 quadratos,

quadratos, vel pedis quadrati ſimiles partes continebit rectangulum ABCD. Nam propter angulos B & D rectos, & angulos BAE, DFA alternos inter parallelas AB, DF, itemque angulos BEA, DAF alternos inter parallelas BE, AD, triangula EBA, ADF (a) *erunt ſimilia, & proinde EB: BA:: AD: DF. Quare, per hanc prop. erit rectang. BA×AD=rectang. EB×DF. Sed BA×AD eſt rectangulum cujus menſura proponebatur inveſtiganda. Cui æquale rectangulum EB×DF, pro altitudine habens rectam EB menſuræ pedali æqualem, tot pedes quadratos, vel pedis quadrati partes quaſvis continebit, quot pedes longitudine, vel pedis partes ſimiles continet* (b) *baſis DF. Quot igitur pedes contineat recta DF longitudine, tot pedes quadratos continebit rectangulum ABCD, Q.E.D.*

(a) Per 4. l. 6.

(b) Sequitur ex 1. l. 6.

Si BE fuerit menſura bipedalis, vel tripedalis, &c. area rectanguli in pedibus quadratis habebitur, multiplicando DF per 4. vel 9. &c. reſpective, hoc eſt, per quadratum iſtius numeri pedum ex quo menſura conſtat.

Fig. 44. Cor. 4. *Si quatuor rectæ AB, FI, IL, BC fuerint proportionales: Erit triangulum ABC ſub prima pro baſi, & ſub quarta pro altitudine, æquale triangulo FIL ſub ſecunda pro baſi & ſub tertia pro altitudine. Sunt enim rectangulorum X, Z, per hanc pr. æqualium,* (c) *dimidia.*

(c) Per 34. l. 1.

Fig. 41. 42. Cor. 5. *Si duo triangula ACL, FOB, angulos C & O æquales habeant; & ſit rectangulum AC×CL ſub lateribus anguli C, æquale rectangulo FO×OB ſub lateribus anguli O; triangula ACL, FOB erunt æqualia: & e converſo, ſi triangula ACL, FOB, quæ angulos ad C & O æquales habeant fuerint æqualia, rectangula AC×CL, FO×OB erunt æqualia. Idem etiam æquiangulis parallelogrammis accidit. Nam propter æqualia rectang. AC×CL, FO×OB; erit per hanc prop. AC: FO:: OB: CL; & proinde, cum in triangulis ACL, FOB æquiangulis ad C & O, latera circa æquales angulos ſint reciproca; triangula ACL, FOB erunt* (d) *æqualia: quod erat primum.*

(d) Per 15. l. 6.

Deinde habeant triangula æqualia ACL, FOB angulos C & O æquales; (e) *erunt igitur latera circum æquales illos angulos reciproce proportionalia hoc eſt, AC: FO:: OB: CL; & proinde per hanc prop. erit rect. AC×CL=rect. FO×OB; quod erat alterum.*

(e) Per eand.

Fig. 39. 40. *Denique eadem eodem modo de parallelogrammis æquiangulis ſimiliter ſe habentibus demonſtrabuntur, ſi loco prop. 15. citetur prop. 14.*

Cor. 6. *Si A fuerit ad B in majori ratione quam C eſt ad D; erit rectangulum ſub extremis majus rectangulo ſub mediis. Et ſi in minori; minus.*

1. *Quia*

1. *Quia enim A majorem habet rationem ad B quam C ad D; erit alia quædam quantitas* E (*quæ minor eſt quam A*) *ad* B, *ut* C *ad* D; *ac proinde per hanc prop.* $E \times D = B \times C$. *Sed* E *minor eſt quam A: ergo* $A \times D$ *majus eſt quam* $B \times C$.

2. *Si vero A fuerit ad* B *in minori ratione quam C eſt ad D; erit alia quædam* F, (*quæ ipſa A major eſt*) *ad* B, *ut* C *ad* D. *Ergo* $F \times D = B \times C$; *ac proinde* $A \times D$ *minus eſt quam* $B \times C$.

Cor. 7. *Hinc, ſi rectangulorum inæqualium latera ita diſponantur, ut rectanguli majoris latera in partibus extremis, & minor latera in mediis conſtituantur; habebit primus terminus ad ſecundum majorem rationem quam tertius ad quartum. Si vero rectanguli minoris latera ſtatuantur in partibus extremis, & majoris latera in mediis; erit primus terminus minor reſpectu ſecundi, quam tertius eſt reſpectu quarti.*

Scholium. *Cum celebre illud Ptolemæi theorema, ſcilicet*, In Fig. 47.
omni quadrilatero circulo inſcripto, Rectangulum ex diagoniis AC in BD, æquale eſſe duobus rectangulis ex lateribus oppoſitis, AB in CD, & AD in BC, *tum ex hac, tum ex propoſitionibus paſſim ante demonſtratis dependeat, illud jam demonſtrandum proponamus. Fiat enim angulum BAE æqualis angulo CAD. Ob angulos BAE, CAD æquales per conſtructionem, & angulos ABE, ACD eidem arcui AD inſiſtentes* (a) *æquales*; (b) *Erunt triangula ABE, ACD ſimilia,* (a) Per 21. l. 3.
& AB : BE :: AC :: CD; & proinde (c) *rectangulum extremorum* $AB \times CD$ *æquabitur rectangulo mediorum* $AC \times BE$. *Pariter, ob angulum BAE angulo CAD æqualem per conſtructionem, addito communi CAE, erit angulus BAC angulo EAD æqualis, & ob angulos ADE, ACB, eidem arcui AB inſiſtentes,* (d) *æquales*; (e) *erunt triangula ADE, ACB ſimilia, & AD : DE :: AC : CB, & proinde* (f) *rectangulum extremorum* $AD \times CB$, *æquale erit rectangulo mediorum* $AC \times DE$. *Sed rectangula* $AC \times BE$ *&* $AC \times DE$ (g) *æquantur rectangulo* $AC \times BD$. *Ergo rectangulum* $AC \times BD$ *ſub diagoniis æquatur rectangulis* $AB \times CD$ *&* $AD \times BC$ *ſub lateribus oppoſitis*; Q. E. D.

(b) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(c) Per hanc prop.
(d) Per 21. l. 3.
(e) Per cor. 9. pr. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(f) Per hanc prop.
(g) Per 1. l. 2.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 48. *SI tres rectæ (AB, FL, BC) fuerint proportionales, rectangulum ſub extremis (AB ; BC) æquale erit quadrato mediæ (FL.)*

Et ſi rectangulum ſub extremis æquetur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ FL accipiatur per O. Quoniam igitur per hyp. AB eſt ad FL, ut FL ad BC; eſtque O par FL; Erit quoque AB ad FL, ut O ad BC. Ergo (a) rectang. ſub extremis AB, BC æquatur rectangulo ſub mediis FL & O, hoc eſt quadrato FL.

(a) Per præc.

2. Pars Demonſtratur ſimiliter ex ſecunda parte præcedentis.

Corollaria.

Fig. 32. 1. EX hac & ex 13. patet, ſi in circulo ſit FG perpendicularis diametro, rectangulum ACB æquale eſſe quadrato FC.

Fig. 48. [Cor. 2. *Hinc ad datam rectam AB, datæ rectæ FL quadratum FO facile eſt applicare, inveniendo rectis AB, FL* (b) *tertiam proportionalem BC, & rectang. ABC* (c) *conſtruendo. Eſt enim dato quadrato FO* (d) *æquale rectangulum ABC ad rectam AB applicatum.*

(b) Per 11. l. 6. (c) Per ſch. p. 46. l. 1. (d) Per hanc pr.

Cor. 3. *Hic etiam liquet methodus rationem quamvis AB ad FL continuandi, ſive duabus datis AB, FL tertiam proportionalem inveniendi; ſi nempe, conſequentis FL quadratum ad antecedentem AB applicetur, habebitur tertia proportionalis BC. Si vero in numeris detur ratio quævis, invenietur tertius proportionalis, multiplicando conſequentem per ſeipſum, & productum dividendo per antecedentem: quotus enim* (e) *erit tertius proportionalis quæſitus.*

(e) Patet ex 17. l. 6. cum cor. 2 p. 16. l. 6.

Fig. 17. Cor. 4 *Hinc lineam inacceſſam, cujus terminus alter eſt acceſſibilis, metiri diſcimus. Sit linea inacceſſa CF, & producatur FC indefinite verſus A. Erigatur a puncto C linea perpendicularis CB: & ad quodvis ejus perpendicularis punctum B applicetur Norma, aut angulus quivis rectus ABF, ita ut per latus BF reſpiciendo, punctum F, per latus BA punctum A in recta ACF obſerventur. Menſuretur linea AC acceſſibilis, & ex analogia ſequenti innoteſcet* (f) *innacceſſa CF. AC:CB::CB:CF. Quadratum itaque lineæ CB dividatur per lineam AC, & Quotiens* (g) *dabit lineam quæſitam CF. Q. E. I.*

(f) Per cor. 1. p. 8 l. 6. (g) Per cor. 3. hujus.

Cor.

Cor. 5. *Hinc ſi detur rectangulum ſub AC, CB ſegmentis rectæ datæ AB, æquale ſcil. quadrato datæ rectæ CF, dimidio ipſius AB non majoris, in proclivi erit invenire rectanguli latera AC, CB; ſive, datam rectam AB ita dividere licebit in C, ut rectangulum ſub ipſius ſegmentis AC, CB æquetur quadrato rectæ datæ C, quæ dimidium ipſius AB non ſuperat. Cum enim data CF ſit per hanc prop. media proportionalis inter AC & CB ſegmenta rectæ datæ AB, idem erit hoc problema cum illo, cujus ſolutio in Schol. ad cor. 2. pr. 13 hujus libri jam ſupra traditur.* Fig. 32.

Scholium 1. Si (a) trianguli cujuſcumque ABC angulus verticalis BAC biſecetur recta DA, quæ baſim BC dividat in duo ſegmenta BD, DC; Erit differentia rectangulorum a lateribus AB, AC, & a ſegmentis baſis BD, DC, æqualis quadrato rectæ AD biſecantis angulum BAC. [*Hoc eſt* rect. BAC — rect. BDC = ADq.] *Triangulo enim ABC circumſcribatur circulus, & producatur AD donec iterum occurrat circulo in E, & connexa EC, in triangulo AEC per punctum D ducatur baſi EC parallela DF; eruntque triangula ADF, AEC* (b) *ſimilia: ſed & propter angulos BAD, EAC* (c) *æquales, & angulos ABD, AEC in eodem ſegmento ABEC, & proinde* (d) *æquales, triangula ABD, AEC ſimilia* (e) *erunt: triangula igitur ABD, ADF ſimilia ſunt; & AB : AD :: AD : AF; unde per hanc prop. rectangulum BAF æquatur ADq. Sed AD : AF ::* (f) *DE : FC. Ergo AB : AD :: DE : FC; & rect. BA × FC* (g) *= rect. ADE =* (h) *rect. BDC. Et utrumque rectang. BAF, & BA × FC, hoc eſt,* (i) *BAC æquabitur ADq × rect. BDC, & utrimque auferendo rectang. BDC, erit BAC rect. — BDC rect. = ADq. Q. E. D.*

Fig. 49. (a) *Vide Arithmet. Univerſ. p. 103 edit. prima.* [b] Per cor. 1. p. 4 l. 6. (c) Ex hyp. (d) Per 21. l. 3. (e) Per cor. 9. pr. 32. l. 1. & pr. 4. l. 6. [f] Per 2. l. 6. (g) Per 16 l. 6. (h) Per 35. l. 3. (i) Per 1. l. 2.

Cor. ad Schol. 1. *Si trianguli ABC circulo inſcripti angulus verticalis A biſecetur recta AE eidem circulo inſcripta, quæ ſecet baſim in D; erit BA : AD :: EA : AC. Triangula enim BAD, EAC ſimilia ſunt, uti e ſcholio præcedente conſtat.* Fig. 49.

Scholium 2. *Sequentis etiam problematis, quod uſui erit in Sphæricis, ex ante demonſtratis, jam tradi poteſt inveniendi ratio.* Per duo puncta B, C in circulo dato FDM, circumferentiam circuli ducere, quæ dati circuli circumferentiam dividat bifariam. *Per centrum A & unum e punctis datis B, ducatur recta BAME infinita; ad quam e centro erigatur perpendicularis AD, & ducatur BD; & in triangulo ABD, propter angulum BAD rectum, erit* (k) *ABD acutus. Ad BD fiat normalis DE, quæ propter angulos ABD, BDE duobus rectis minores,* (l) *interſecabit lineam infinitam BAME, ut in puncto E. Denique circulus BRE ducatur per* (m) *tria puncta B, C, E. Dico factum, Ducatur enim circuli jam deſcripti BRE* Fig. 50.

(K) Per cor. 5. p. 32 l. 1. (l) Per ſch. p. 31. l. 1. (m) Per p. 5. l. 4.

chorda, per circuli dati centrum A, & alterutram peripheriarum interſectionem G, nimirum GAφ. Ducatur etiam circuli dati FDM, diameter GAF, per eamdem peripheriarum interſectionem G.

Quoniam ab angulo recto trianguli BDE, demittitur DA perpendicularis baſi BE, (a) erunt AB, AD, AE ÷, & proinde per hanc prop. rectang. BAE ≡ ADq; id eſt, ob circuli dati FDM æquales radios AD, AG, AF, erit rect. BAE ≡ rect. GAF. Cum vero in circulo BRE, rectæ BE, Gφ ſe mutuo ſecent in A, (b) erit rect. BAE ≡ rect. GAφ. Unde GAF rect. ≡ GAφ rect. Ergo (c) AF ≡ Aφ: & puncta F, φ coincident: atque arcus FDG ≡ (d) arcui FMG. Q. F. I.

(a) Per cor. 1. p. 8. l. 6. (b) Per p. 35. l. 3. (c) Per 1. l. 6. (d) Per def. 20. l. 1.

Fig. 51. Schol. 3. *In circulo quovis cujus diameter eſt AB, & arcuum AC, AD ſinus recti ſunt CE, DF; ſinus verſi AE, AF; ſubtenſæ AC, AD: Erit AE : AF :: ACq : ADq; hoc eſt, ſinus verſi erunt ut quadrata ſubtenſarum. Ductis enim BC, BD,* (e) *erunt BA, AC, AE ÷;* (f) *itemque BA, AD, AF ÷.* (g) *Ergo BA × AE ≡ ACq, & BA × AF ≡ ADq. Sed AE : AF ::* (h) *BA × AE : BA × AF. Ergo AE : AF :: ACq : ADq.*]

(e) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (f) Per idem. (g) Per hanc prop. (h) Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 52. *Super data recta (RS) dato polygono (BQ) ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.*

Polygonum datum BQ reſolve in triangula. Super data recta RS fac (*i*) angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt (*k*) latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum.

(i) Per 23. l. 1. (k) Per cor. 17. p. 32. l. 1. & ſch. p. 31. l. 1.

Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K (*l*) æquales erunt: & quia etiam (*m*) V æquatur T, totus EV toti KT æqualis erit. Similiter quia ſinguli O, I æquantur ſingulis A & C, toti OI, AC æquales erunt. Et quia V & I æquantur T & C, etiam Z & Q æquales (*n*) ſunt. Polygona igitur RZ, BQ ſibi mutuo æquiangula ſunt. Reliquum eſt ut oſtendatur etiam latera eſſe proportionalia. RS eſt ad SX, (*o*) ut BF ad FL: & rurſum SX eſt ad SZ, (*p*) ut FL ad FQ. Ergo ex æquo (*q*) RS eſt ad SZ, ut BF ad FQ, &c.

(l) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (m) Per conſtr. (n) Per cor. 9. p. 32. l. 1. [o] Per 4. l. 6. [p] Per eamd. [q] Per 22. l. 5.

Corollarium. *Hinc Mappas ſive Chartas Geographicas, Chorographicas, vel Geodæticas; aut agrorum, ædificiorum, regionumque delineationes Ichnographicas conſtruendi methodus derivatur. Nihil enim aliud ſibi volunt hujuſmodi delineatores, quam figurarum ingentium ad ſimiles figuras exiguas reductionem, quam præſens propoſitio exhibet.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIX.

T*Riangulorum* (X , Z) *ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum* (*AC* , *FI*) *æqualibus angulis ſubtenſorum.* Fig. 53.54.

Hoc eſt ſi (*a*) fiat ut AC ad FI , ſic FI ad tertiam AQ ; triang. X eſt ad triang. Z. ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin. 10. l. 5. (a) Per 11. l. 6.

Quoniam triangula X , Z ſunt ſimilia , erit BA ad LI , (*b*) ut AC ad IF. Sed per conſtr. ut AC ad IF , ſic IF ad AQ. Ergo etiam BA eſt ad LI , (*c*) ut IF ad AQ. Ergo [*juncta BQ* ,] in triangulis QBA & Z , latera circa angulos A , I, qui per defin. triangulorum ſimilium æquales exiſtunt , ſunt reciproca . Æquantur igitur (*d*) QAB & Z. Atqui triangulum X ad QBA eſt ut (*e*) baſis AC ad baſim AQ. Ergo etiam X eſt ad Z , ut AC ad AQ. Quod erat demonſtrandum. (b) Per 4. l. 6. (c) Per 11. l. 5. (d) Per 15. l. 6. (e) Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XX.

S*Imilia polygona* (*ABCDE* , *FGHIK*) *dividuntur* (1 ,) *in ſimilia triangula* (*P* , *S* , & *Q* , *T* , & *R* , *V* ,) *numero æqualia* ; (2.) & *totis proportionalia* : (3) & *polygonorum proportio duplicata eſt proportionis laterum* (*AB* , *FG*) *inter æquales angulos* (*B* , *G* & *BAE* , *GFK*) *exiſtentium.* Fig. 55.

1. Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia , erunt (*f*) ſibi mutuo æquiangula , eruntque bini binis æquales anguli BAE , GFK , & B , G , & BCD , GHI , & CDE, HIK, & E , K. Quia igitur AB eſt ad BC , (*g*) ut FG ad GH , angulique B & G æquales ſunt , ſimilia (*h*) ſunt triangula P , S. Similiter demonſtrabitur ſimilia eſſe R & V. Deinde quia anguli toti BCD,GHI , & ablati BCA, GHF æquales ſunt , etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt . Eodem modo oſtendam æquari angulos ADC , FIH. Ergo (*i*) tertius CAD tertio HFI æqualis eſt . Quare (*k*) etiam Q & T triangula ſimilia ſunt . Liquet ergo 1. pars. (f) Per def. 1. l. 6. (g) Per eand. (h) Per 6. l. 6. (i) Per cor. 9. p. 32 l. 1. (k) Per 4. l. 6.

2. Pars. Quoniam ſimilia ſunt P & S , ratio P ad S duplicata eſt (*l*) rationis CA ad HF. Sed ob eamdem cauſam (l) Per præc.
etiam

etiam ratio Q ad T duplicata eſt rationis CA ad HF. Ergo
(a) Per 14. l. 5. P eſt ad S ut (a) Q ad T. Eodem modo oſtendam ut Q eſt
(b) Per 12. l. 5. ad T, ita R eſſe ad V. Ergo ut (b) unum antecedens P eſt
ad unum conſequens S.ita omnia antecedentia P,Q,R, ſimul
ſumpta, ad omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumpta, hoc
eſt, ita polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

(c) Per præc. 3. Pars. Ratio P ad S eſt (c) duplicata rationis AB ad
FG. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum
ratione P ad S, ut jam oſtendi. Ergo etiam ratio polygoni
ad polygonum eſt duplicata rationis AB ad GF.
Quod erat tertium.

Corollaria.

1. OMnes figuræ ordinatæ ſeu regulares, ut æquilatera
triangula, quadrata, pentagona, &c. ſunt
inter ſe in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ
ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex def. 1. l. 6.

[2. *Si tres rectæ fuerint proportionales; erit prima ad tertiam, ut figura quævis plana (ſive ſit triangulum, ſive quadrilaterum, ſeu polygonum quodcumque) ſuper prima, ad figuram ſimilem, ſimiliterque deſcriptam ſuper ſecunda, vel erit rectarum proportionalium prima ad tertiam, ut figura quævis plana ſuper ſecunda, ad figuram ſimilem, ſimiliterque deſcriptam ſuper tertia. Nam per def. 10. l. 5. trium proportionalium prima eſt ad tertiam in duplicata ratione primæ ad ſecundam, vel ſecundæ ad tertiam. Unde per prop. 19. vel hanc 20. liquet propoſitum.*]

Fig. 55. 3. Si figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG
inter æquales angulos poſita, ſint nota, etiam proportio
figurarum innoteſcet. Sit, ex gr. AB 2. ped. & FG 6.
pedum. Fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum,
(d) Per cor. 2. hujus nempe 18. Figura minor eſt ad (d) majorem, ut 2. ad
18. ſeu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis
(e) Per cor. 3. p. 17. l. 6. numerus, ſi (e) ſecundus datorum multiplicetur per ſeipſum,
& productus per primum dividatur.

4. Ex eadem propoſitione elicitur methodus præclara,
Fig. 56. figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in
ratione data. Ut ſi velis pentagoni, cujus latus eſt AB,
aliud facere quintuplum [*quod ſit dato ſimile*:] Inter
(f) Per 13. l. 6. terminos rationis datæ AB, BC, inveni (f) mediam
(g) Per 18. l. 6. proportionalem BX. Super hac conſtrue (g) pentagonum
ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati.

Nam per cor. 2. hujus, pentagonum ſuper AB eſt ad
ſibi ſimile ſuper BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro,

Digitized by Google

Porro, cum etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum, ut oſtendetur p. 2. l. 12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

[Cor. 5. *Si figurarum quarumvis ſimilium proportio ſit nota; innoteſcet etiam proportio laterum inter æquales angulos exiſtentium, utpote quæ ſubduplicata ſit proportionis figurarum. Sit, ex. gr. figura* P Q R *ad figuram* STV*, ut 4 ad 9 Inter 4 & 9 inveniatur medius proportionalis 6, (nempe* (a) *extractione radicis quadraticæ numeri* $36 = 4 \times 9$, *) & cum ſint 4, 6, 9 ÷ ſintque figuræ* PQR, STV *ad ſe invicem ut 4 ad 9, erunt illarum latera homologa ut* (b) *4 ad 6, ſive ut 2 ad 3.* Fig. 55.

(a) *Patet ex 17. l. 6.*

(b) *Per cor. 2. hujus.*

Cor. 6. *Hinc corrigendus eſt eorum error, qui figurarum ſimilium eamdem atque laterum rationem eſſe opinantur. Si enim duorum, non tantum triangulorum ſimilium, ſed & quadratorum, pentagonorum, hexagonorum, &c. (aut etiam circulorum) latera (ſive diametri) ſint inter ſe ut 2 ad 1; Ipſæ figuræ ſive areæ erunt 4 ad 1: ſi latera ſint inter ſe ut 3 ad 1, erunt figuræ ipſæ ſive areæ ut 9 ad 1; in duplicata ſcilicet laterum (vel diametrorum) ratione. Sunt enim 4, 2, 1 ÷; Item 9, 3, 1 ÷.*

Schol. *Cum quadratorum* E, K *proportio duplicata ſit proportionis laterum* OR, SV*; inde ratio duplicata laterum* OR, SV*, per rationem* ORq *ad* SVq *ſæpiſſime deſignari ſolet: v. g. ſi ſuper lateribus* OR, SV *fiant aliæ quævis figuræ ſimilee & ſimiliter poſitæ; cum ſint eæ in ratione duplicata laterum* OR, SV*, erunt ad ſe invicem ut quadratum* E *ad quadratum* K*, ſive ut* ORq *ad* SVq.] Fig. 57.

PROPOSITIO XXI.

F*Iguræ rectilineæ (A, B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuo ſimiles ſunt.* Fig. 57.

Patet ex defin. 1. l. 6. axiom. 1. l. 1. & propoſ. 11. l. 5.

[*Quia enim tam figura A quam B, figuræ C ſimilis eſt; erit illarum utraque ipſi C æquiangula, & circa æquales angulos latera ipſius C lateribus habebit proportionalia. Ergo A ipſi B æquiangula erit, & latera circa ipſarum A & B æquales angulos erunt proportionalia; & proinde figuræ A & B ſimiles erunt.*]

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 37. *SI quatuor aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint; figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque ab iis deſcriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt.*

Et e converſo, [Si proportionales fuerint figuræ rectilineæ (A, B, & E, K,) ſimiliter deſcriptæ ſuper rectis (FI, LQ, & OR, SV;) erunt etiam ipſæ lineæ proportionales.]

Demonſtratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam
(a) Per 19. enim rationes A ad B, & E ad K ſunt (a) duplicatæ
& 20. l.6. rationum FI ad LQ, & OR ad SV; ex hypotheſi æqualium; etiam ipſæ æquales erunt.

Pars 2. patet ex 35. l. 5. [*Quia enim rationes æquales*
(b) Per eaſd. *A ad B, & E ad K*, (b) *duplicatæ ſunt rationum FI ad LQ, & OR ad SV; etiam hæ æquales erunt.*

Cor. 1. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices quadraticas. Si enim multiplicentur inter ſe quantitates ſignis radicalibus affixæ, & producto præfigatur ejuſdem radicis ſignum; habebitur radicum datarum productum. Ex. gr. ſit* $\sqrt{5}$ *multiplicanda in* $\sqrt{3}$ *: dico provenire* $\sqrt{15}$*. Nam ex multiplicationis definitione debet eſſe unitas ad multiplicantem (ſive* $\sqrt{3}$ *) ut multiplicandus (ſeu* $\sqrt{5}$ *) eſt ad productum. Ergo per hanc prop. erit quadratum unitatis ad quadratum multiplicantis, ut quadratum multiplicandi ad quadratum producti; hoc eſt, ſi pro numero producto ponatur P, erit 1. 3 :: 5 Pq. Sed 1 3 :: 5. 15. Ergo* $Pq = 15$*, &* $P = \sqrt{15}$.

Rurſum, ſi proponatur $\sqrt{15}$ *dividenda per* $\sqrt{5}$*; quotiens erit* $\sqrt{3}$*. Nimirum dividendo 15. per 5. & quoto 3, ſignum radicale præfigendo. Cum enim, ex definitione diviſionis, ſit numerus dividens ad dividendum, ut unitas ad quotum; ergo per hanc prop. erit quadratum dividentis ad quadratum dividendi, ut quadratum unitatis ad quadratum quoti; hoc eſt, ſi pro quoto ponatur Q. erit 5. 15. :: 1. Qq. Sed 5 15 :: 1. 3. Ergo* $Qq = 3$*, &* $Q = \sqrt{3}$.

Fig. 32. Cor. 2. *Si recta linea AB ſecta ſit utcumque in C; rectangulum ſub partibus AC, CB contentum, eſt medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub tota AB & una parte AC vel CB, eſt medium proportionale inter quadratum totius AB, & quadratum dictæ partis AC vel CB. Nam ſuper diametro*

AB

Digitized by Google

AB deſcripto ſemicirculo AFB, & erecta ad diametrum perpendiculari CF; ſi compleatur triangulum rectangulum AFB, liquet eſſe (a) *AC : CF :: CF : CB, Ergo per* (a) Per cor.
hanc prop. erit ACq : CFq :: CFq: CBq; hoc eſt, (b) 1. p. 8. l. 6. (b) Per cor.
ACq: ACB rectang: : ACB rectang: CBq. 1. p. 17. l. 6.
Porro (c) *BA : AF :: AF : AC. Ergo BAq: AFq::* (c) Per cor.
AFq: ACq. Hoc eſt, (d) *BAq: BAC rectang: : BAC* 2. p. l. 8. 6. (d) Per 17.
rectang: ACq. Eodem modo ABq: ABG :: ABG: BCq.] l. 6.

PROPOSITIO XXIII.

ÆQuiangula parallelogramma (X, Z) *inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum AC ad CB, & LC ad CF.* Fig. 58. (quam quære ante Fig. 47.)

Hoc eſt, ſi fiat CB ad O, ut LC ad CF; X eſt ad Z, (*e*) ut AC ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. (e) Per def.
parte 3. num. 13. [*Vel reſpice ſis ad inſtantias, quibus* 5. l. 6.
definitionem quintam hujus libri (*quam ex Euclide reſtituimus*) *jam ſupra illuſtravimus.*

Ponantur AC, CB ita in directum, ut anguli æquales ACL, BCF ſint ad partes contrarias rectæ AB; (f) (f) Per 13.
eruntque LC, CF in directum.] & 14. l. 1.

Concurrant IL, SB, in Q. Parallelogrammum X eſt (*g*) (g) Per 1.
ad parallelogrammum R, ut AC ad CB: & R eſt ad Z, l. 6.
(*h*) ut LC ad CF, (hoc eſt, ut CB ad O.) Ergo (*i*) ex (h) Per eamd.
æquo X eſt ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonſtrandum. (i) Per 22. l. 5.

Corollaria.

HInc & ex 34. l. 1. patet primo, Triangula quæ Fig. 58.
unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium.

Patet 2. Rectangula, ac proinde (*k*) & parallelogram- (K) Per 35.
ma quæcumque, rationem inter ſe habere compoſitam 36. l. 1. & def. 3. l. 6.
ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudi- (l) Per def.
nem. Neque aliter de triangulis [*rectangulis, & inde* 3. l. 6. &
(l) *de triangulis quibuſcumque*] ratiocinaberis. pr. 37. & 38. l. 1.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammo- Fig. 58.
rum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum baſes AC, CB, altitudines CL, CF. Fiat (*m*) ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita [m] Per 12.
baſium altera CB ad O. Parallelogrammum X eſt ad l. 6.
parallelogram. Z, ut AC eſt ad O.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 59. *In omni parallelogrammo (SF ,) quæ circa (AB) diametrum ſunt parallelogramma (CL , OI ,) & toti & inter ſe ſimilia ſunt ,* [& ſimiliter poſita ; hoc eſt , latera homologa vel in eadem recta jacent , vel ſunt ſibi invicem parallela.]

Per 27. 1. æquales ſunt anguli BCE, BSA ; & BLE, BFA. Per eamdem CEL eſt par CIF , hoc eſt per eamdem ipſi SAF ; B vero & toti SF, & parti CL communis eſt. Igitur totum SF & pars CL æquiangula ſunt. Reliquum eſt , ut etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE , BSA , eſt CE parallela ad SA , erit (*a*) BC ad CE , ut BS ad SA ; & CE eſt ad EB , ut (*b*) SA ad AB. Quia vero in triangulis quoque ELB , AFB , EL eſt parallela ad AF , erit EB ad EL , ut (*c*) AB ad AF. Ergo ex æquo (*d*) CE eſt ad EL , ut SA ad AF. Igitur (*e*) CL & totum SF ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam OI eſſe ſimile toti SF. Ergo (*f*) CL & OI ſunt etiam ſimilia inter ſe. [*Quoniam vero latera homologa vel in eadem recta jacent , ut BC & BS ; BL & BF ; vel ſunt ſibi invicem parallela , ut CE & SA ; EL & AF ; liquet parallelogramma CL & SF eſſe ſimiliter poſita : & eodem modo conſtabit parallelogramma OI & SF , (ac proinde CL & OI) eſſe ſimiliter poſita*] Quæ erant demonſtranda.

(a) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(b) Per idem cor.
(c) Per idem cor.
(d) Per 22. l. 5.
(e) Per def. 1. l. 6.
[f] Per 21. l. 6.

[Scholium. *Huic propoſitioni problemata duo , quæ in conicis uſui ſunt futura , liceat adjungere . Prius ad ellipſim ſpectat , poſterius ad hyperbolam.*

Fig. 60. 1. *Datis tribus rectis A , B , C , quarum tertia C minor ſit quam prima A , & conſtituto rectangulo DEFK ſub prima A vel DE , & ſecunda B vel EF ; ad ſecundam aliud rectangulum applicare , latitudinem habens tertiæ C æqualem , & deficiens rectangulo ſimili & ſimiliter poſito , ei quod ſub prima & ſecunda conſtituitur .*

Ducta rectanguli E (diametro DF , e latere DE primæ A æquali , abſcindatur EG tertiæ C æqualis ; & per G ducatur GH lateri EF parallela , diametro occurrens in H ; & per H ducatur HI lateri D parallela , ipſi) F occurrens in I. Dico factum: rectangulum enim GEIH eſt id quod petebatur. Productis enim GH , IH , perficiantur rectangula IL , GM. Et cum

cum rectangula EK, IL circa eamdem diametrum ſint, (a) *erunt ſimilia & ſimiliter poſita. Conſtructo itaque rectangulo EK ſub datarum prima A & ſecunda B, ſive ſub DE & EF, ad ſecundam EF aliud rectangulum, nempe GI, applicatur, latitudinem habens GE tertia C aequalem, & deficiens rectangulo IL ſimili & ſimiliter poſito ipſi EK quod ſub prima & ſecunda conſtituitur. Q.E.F.* [a] Per hanc prop.

2. *Datis tribus rectis A, B, C, & conſtituto rectangulo DEFK ſub prima A vel DE, & ſecunda B vel EF; ad ſecundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertia C aequalem, & excedens rectangulo ſimili & ſimiliter poſito ei quod ſub prima & ſecunda conſtituitur.* Fig. 61.

Ducta rectanguli EK diametro DF, producatur DE ad G, ut ſit adjecta EG tertia data C aequalis, & per G ducatur GH lateri EF parallela, & occurrens diametro DF producta in H; compleaturque rectangulum EGHI. Dico factum. Productis enim HI, DK, KF, perficiantur rectangula GM, LI. Et cum rectangula EK, LI circa eamdem diametrum ſint, erunt (b) *ſimilia & ſimiliter poſita. Conſtructo itaque rectangulo EK ſub datarum prima & ſecunda, DE, EF, ad ſecundam EF aliud rectangulum GI applicatur, latitudinem habens EG tertia C aequalem, & excedens rectangulo LI ſimili & ſimiliter poſito ipſi EK quod ſub prima & ſecunda conſtituitur. Q.E.F.*] (b) Per eamd.

PROPOSITIO XXV.

Polygonum datum A in aliud dato B ſimile transmutare. Fig. 62.

Sive polygonum conſtituere aequale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q (*c*) aequale B. Deinde ſuper FS fac (*d*) rectangulum R aequale A. Manifeſtum (*e*) eſt CF & FI eſſe in directum. Inter CF, FI inveni (*f*) mediam proportionalem FL. Super hac fac (*g*) polygonum ſimile dato B: erit hoc etiam aequale dato A. (c) Per 45. l. 1. (d) Per eamd. (e) Per 14. l. 1.

Nam cum per conſtr. ſint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper FL factum, (*h*) ut CF ad FI; hoc eſt (*i*) ut Q ad R. Igitur permutando, ut polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper FL ad R. Sed per conſtr. polygonum B aequatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper FL, ſimile ipſi B, aequatur R, hoc eſt, per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur quod petebatur. (f) Per 13. l. 6. (g) Per 18. l. 6. (h) Per cor. 2 p. 20. l. 6. (i) Per 1. l. 6.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 63. P*Arallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita* (*BD*, *FN*,) *habentia angulum communem* (*A* ,) *circa eamdem diametrum exiſtunt*.

Duc rectas AE, CE. Si negas AEC, eſſe diametrum communem parallelogrammorum BD & FN; ipſius BD diameter eſto recta alia AGC ſecans FE in G, & duc rectæ AF parallelam GH. Parallelogramma igitur FH, BD exiſtent circa communem diametrum AGC, ac pro-
(a) Per 24 l. 6. inde (*a*) erunt ſimilia [*& ſimiliter poſita.*] Ergo ut BA ad AD, (*b*) ſic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD,
(b) Per def. 1. l. 6. ſic AF ad AN, cum BD, FN ſimilia ſint per hyp. Ergo FA eſt ad AH, ut FA ad AN. Quod eſt abſurdum.

[Cor. 1. *Hinc motuum compoſitionem æſtimare diſci-*
Fig. 59. *mus. Impellatur eodem temporis momento, corpus ad A poſitum, vi AF ſecundum directionem rectæ AF, & vi AS ſecundum directionem rectæ AS, (ita nempe, ut corpus ſola vi AF rectam AF, & ſola vi AS rectam AS in dato tempore deſcriberet;) & compleatur parallelogrammum ASBF: ex conjunctione virium, corpus A diagonalem AB eodem dato tempore deſcribet. Idem enim erit motus corporis A, ac ſi, dum illud feratur in motu uniformi ab A ad S in recta AS, ipſa recta AS motu itidem uniformi, & ſitu ſibi ipſi ſemper parallelo, puncto ſuo A rectam AF eodem tempore deſcriberet; nam eo pacto conſervabuntur utræque motuum directiones verſus plagas SB atque FB reſpective. Unde fiet, ut dum corpus A aliqua quavis temporis dati parte, (v. gr. tertia) perveniens ad O, eamdem (tertiam) partem rectæ AS deſcribat; ipſa AS in ſitum IC transferetur, & ipſius punctum A eamdem itidem (tertiam) partem rectæ AF eadem (tertia) dati temporis*
(c) Per 15. l. 5. *parte deſcribet; ita ut ſit SA ad AF,* (c) *ut OA ad AD ac proinde ducta OL ipſi AF parallela, quæ ſecet rectam*
(d) Per def. 1. l. 6. *IC in E, parallelogramma SF, OI erunt* (d) *ſimilia, & ſimiliter poſita, & corpus A ex utroque motu, in fine ejuſdem (tertiæ) dati temporis partis) invenietur in puncto E. Et cum parallelogramma iſta habeant etiam angulum communem A, per hanc prop. circa eamdem diametrum AB exiſtunt, & corpus ad B erit in ipſa diametro ſeu diagonali AB. Et eodem modo, corpus in quovis alio dati temporis momento reperietur alicubi in recta AB, & in fine temporis dati, in puncto B. Ergo deſcribet ipſam diagonalem AB viribus conjunctis, eodem tempore quo vi AS rectam AS, vel vi AF rectam AF ſeparatim deſcriberet.*

Cor. 2

Cor. 2. *Deſcribat igitur corpus quodvis in dato quovis tempore rectam DA vi inſita ut DA: Idem corpus æquali tempore rectam AO rectæ DA æqualem, & ſecundum eamdem directionem deſcriberet, ſi nulla vi alia impediretur. Si itaque corpus ad A, a motu ſecundum AO deflectens, in eodem tempore rectam AE deſcribat; tum ducta OE, compleatur parallelogrammum OI, & manifeſtum* (a) *eſt, corpus ſecundum rectam AE ferri, vi compoſita ex vi priori inſita DA, vel AO,* (a) *Per cor. 1. hujus.* *& ex nova vi AI ad punctum A corpori compreſſa ſecundum directionem rectæ AI.*

Cor. 3. *Hinc e converſo, ſi corpus vi AB deſcribat rectam AB, idem erit motus, ac ſi rectam eamdem AB eodem tempore deſcriberet vi compoſita ex viribus, quæ lateribus AF, AS parallelogrammi cujuſcumque SF, cujus diameter ſit recta AB, proportionales fuerint, & quæ etiam ſecundum latera iſta AF, AS dirigantur.*

Cor. 4 *Hinc inſuper cum Illuſtr. Newtono colligimus a-* Fig. 64. *reas quas corpora quæcumque in gyros acta circa immobile centrum virium deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales. Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam lineam AB. Idem corpus ſecunda temporis parte, ſi nihil impediret, recta ad* κ *pergeret; deſcribens lineam* $B\kappa$ *æqualem ipſi AB, ita ut radiis ad centrum ductis confectæ forent* (b) *æquales areæ ASB,* $BS\kappa$. *Verum ubi corpus venit ad B,* [b) Per 38. l. 1.] *agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, faciatque corpus a recta* $B\kappa$ *deflectere, & in recta BC pergere: hoc eſt, ſi vis centripeta in eo loco ſit ad vim inſitam, ut* $B\gamma$ *ad* $B\kappa$, *& perficiatur parallelogrammum* $B\gamma C\kappa$; *Corpus lineam* (c) *diagonalem BC deſcribet,* (c) Per cor. 1. huj. prop. *& completa ſecunda temporis parte reperietur in C, in eodem plano cum triangulo primo SAB. Junge SC. Area radio ad centrum ducto deſcripta, hoc eſt triangulum SBC* (d) *æquale erit triangulo* $SB\kappa$; *atque adeo* (d) Per 37. l. 1. (e) *triangulo primo SAB. Similiter argumento tertia tempo-* (e] Per axio. 1. l. 2. *ris parte corpus a C ad* δ *vi inſita pertingeret, ita ut linea* $C\delta$ *æqualis eſſet lineæ CB: ſed ſi vis centripeta, ſive major priore ſive minor, iterum agat ad punctum C, in fine tertii temporis reperietur corpus alicubi in linea* $D\delta$, *lineæ SC parallela: ideoque ut prius, diagonalem CD deſcribet: & radio DS ad centrum ducto, erit triangulum SDC in eodem plano cum quadrilatero SABC; & triangulo* (f) $S\delta C$, *atque* (f) Per 37. l. 1. *adeo reliquis SCB, SAB inter ſe æqualibus, erit æquale. Pari modo ſi vis centripeta ſucceſſive agat in D, E, F, faciens ut corpus ſingulis temporis partibus diagonales DE, EF, &c. deſcribat; Erunt hæ in eodem plano, & triangula triangulis pri-*

eribus æqualia deſcribentur. Æqualibus itaque temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: atque adeo arearum ſumma quævis SADS, SAFS ſunt inter ſe ut deſcriptionum tempora. Augeatur jam numerus, & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ABCDEF, &c. erit linea curva, & area hoc in caſu in plano immobili deſcriptæ, erunt etiamnum temporibus proportionales Q. E. D.

Fig.64. Cor. 5. *Hinc etiam, cum* CL. *Newtono, colligimus corpora omnia quæ in curva aliqua moventur, & areas circa centrum aliquod S temporibus proportionales deſcribunt, a vi centripeta ad centrum illud tendente perpetuo urgeri. Cum enim corpus vi inſita æquales rectas AB, Ex æqualibus temporibus*
(a) Per 38. l. 1. *deſcriberet, ductis SA, SB, Sx* (a) *æquabuntur triangula BSA, SBx. Cum vero corpus ex hypotheſi æquales areas SAB, SCB æqualibus temporibus deſcribat, æquabuntur etiam triangula SBA, SBC.* Quare *& triangula SBx, SBC æqualia erunt. Et*
(b) Per 39. l. 1. *quoniam ſuper eadem baſi SB conſiſtunt, puncta C & x* (b) *erunt in linea Cx baſi parallela: atque adeo ducta Cγ recta x B parallela, erunt Bx, Bγ parallelogrammi xγ latera, & BC diagonalis. Corpus itaque a recta ABx deflectens ad punctum B; & diagonalem BC deſcribens eodem tempore quo latus Bx*
(c) Per cor. 2. huj prop. *abſque nova vi ad B impreſſa deſcriberet,* (c) *urgetur etiam in puncto B, vi Bγ tendente ad S centrum virium. Atque ita in punctis omnibus C, D, E, F, &c.* Q. E. D.

Cor. 6. *Cum itaque in Planetarum primariorum Syſtemate, Areæ radiis ad Solem ductis ſint ſemper temporibus proportionales, uti Aſtronomis eſt notiſſimum; Urgentur Planetæ vi perpetua ad Solem tendente. Neque aliter de ſecundariis circa primarios ſuos eſt ratiocinandum.*

Fig 59. Cor 7. *Sit parallelogrammi* BCEL *diameter* BE, *& productis* CE, LE *fiat parallelogrammum* AOEI *parallelogrammo* BLEC *ſimile, ſimiliterque poſitum, diametrum habens* AE: *dico quod parallelogrammorum* CL, OI *diametri* BE, AE *in directum jacent. Nam productis* BC, AO, *&* BL, AI, *perficia-*
(d) Per hyp. *tur parallelogrammum SF; & propter* CE: EI :: (d) LE: EO,
(e) Per 18. l. 5. *erit* CI: IE :: (e) LO: OE; *&* (f) *alternatim,* CI: LO :: IE: OE,
(f) Per 16 l 5. *hoc* (g) *eſt, SA: AF :: OA: AI. Parallelogramma igitur SF, OI*
(g) Per 34. l. 1. (h) *ſimilia, ſimiliter poſita, & communem angulum ad A habentia, per hanc prop. circa eamdem diametrum exiſtunt. Atque eodem modo demonſtrabitur parallelogramma SF, CL circa*
(h) Per def. 1. l. 6. *ca eamdem diametrum exiſtere. Liquet igitur diametros* AE, EB *partes eſſe diametri* AB, *& proinde in directum jacere.*

Cor. 8. *Si duo triangula* AOE, ECB, *quæ latera duo* AO, OE *duobus* LC, CB *proportionalia habent, (ut ſit* AO: OE ::
EC:

EC: CB;) ſecundum unum angulum OEC ita componantur, ut latera homologa ſint parallela, nempe AO ipſi EC, & OE ipſi CB; erunt reliqua latera AE, EB in directum. Productis enim OE, CE, ductiſque ad illas parallelis AI, BL, perficiantur parallelogramma OI, CL; quæ propter parallelas OA, CI, BL, & AI, OL, CB, erunt (a) æquiangula, & ſimiliter (a) Per 27.l.1.
poſita; & propter AO: OE:: EC CB, erunt etiam ſimilia (b) (b) Per def.
ac proinde per cor. præcedent, eorum diagonales AE, EB in 1.l.6.
directum jacent. Q. E. D.

Hoc autem corollarium propoſitionem 32. hujus l. 6. nobis exhibet; quam quoniam omiſerat Tacquetus, ex hac prop. 26. mediante corollario ſeptimo deducendam cenſuimus.

PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum (AD, AF) ſecundum eamdem rectam (AB) applicatorum, & deficientium parallelogrammis (CE, IH) ſimilibus & ſimiliter poſitis, ei parallelogrammo (AD) quod ſuper dimidia AB deſcribitur; maximum eſt illud (AD) quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimile exiſtens defectui (CE.) Fig. 65, 66.

Applicentur ad rectam AB biſectam in C, parallelogrammum ACDL, & quodvis aliud AIFG, deficientia parallelogrammis CBED, & IBHF, ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi AD parallelogrammo quod a dimidia recta AB deſcribitur: Dico parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus eſſe.

Hujus autem propoſitionis caſus ſunt duo: vel enim parallelogrammi AF baſis AI eſt ipſa AC major, vel minor.

1. *Sit primo major, ut in Fig. 65. Et quoniam parallelo-* Fig 65.
gramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH haben- (c) Per
tia, ſimilia & ſimiliter poſita ſunt (c); circa diametrum eam- hyp.
dem DFB (d) erunt; & producta IF ad K, erit CF ipſi FE (e) (d) Per
æquale. Commune apponatur IH, eritque CH = IE. Sed prec.
propter AB biſectam in C, (f) erit GC = CH: Ergo & GC (e) Per 43.l.1.
= IE. Commune adjiciatur CF, & erit AF = CF + IE. (f) Per
Sed CE, (hoc eſt, (g) AD, propter æquales baſes AC CB) ma- 36.l.1.
jus eſt quam CF + IE: AD igitur eſt ipſo AF majus. (g) Per eamd.

2. *Deinde ſit AI minor quam AC, ut in Fig. 66. Et quo-* Fig. 66.
niam parallelogramma CF, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, ſimilia ſunt & ſimiliter poſita (h); circa eamdem (h) Per
dia- hyp.

(a) Per 10. — *diametrum* (a) *BDF erunt. Ducatur diameter, & deſcribatur figura. Et propter æquales AC, CB,* (b) *æquabuntur LD, DE: unde & parallelogramma GD, DH æqualia* (c) *erunt. Parallelogrammum igitur DH eſt parallelogrammo GK majus. Sed DH* (d) $=$ *DI: ergo DI majus eſt quam GK. Commune apponatur AK, & parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus erit.*

(b) Per 34. l. 1. (c) Per 36. l. 1. (d) Per 43. l. 1.

Omnium itaque parallelogrammorum ſecundum eamdem rectam applicatorum, & deficientium parallelogrammis ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quod a dimidia deſcribitur, maximum illud eſt quod ad dimidiam applicatur. Q. E. D.

Fig. 67. — Cor. 1. *Si ad eamdem rectam AB applicentur parallelogramma AF, Aφ deficientia parallelogrammis IH, ιη ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi AD (vel CE) parallelogrammo quod a recta AB dimidia deſcribitur, ita tamen ut ſit ſumma rectarum IB + ιB = AB, (hoc eſt, Aι = IB, & CI = Cι;) Parallelogramma AF, Aφ erunt æqualia. Nam propter æquales AC, CB, & ιC, CI,* (e) *æquantur etiam GN, NH, & ON, NF: & in triangulo FOφ, propter rectas ND, Dκ lateribus φO, OF reſpective parallelas, erit* (f) *etiam FD = Dφ, & Oκ = κφ. Unde propter baſes æquales,* (g) *erit NL = NE, & Nκ = NK: ergo OL (= FE =* (h) *FC) =* (i) *OC, & 2OL ſive Oη = 2OC ſive OI. Commune apponatur AO, eritque Aφ = AF.* Q. E. D.

(e) Per 34. l. 1. (f) Per 2. l. 6. (g) Per 36. l. 1. (h) Per 43. l. 1. (i) Per 36. l. 1.

Cor. 2. *Si ad rectam AB applicentur parallelogramma æqualia AF, Aφ, deficientia parallelogrammis IH, ιη ſimilibus & ſimiliter poſitis parallelogrammo AD (vel CE) quod ſuper dimidia ipſius AB deſcribitur, punctis I & ι in recta AB jacentibus; Erit IB + ιB = AB, hoc eſt, Aι = IB. Nam producta recta IK ad M, propter* (k) *Aφ = AF, ablato communi AO, erit Gφ = ιF =* (l) *HM. Ergo & GO* (m) *= FH, ac proinde* (n) *Aι = IB.*

(K) Per hyp. (l) Per 43. l. 1. (m) Per 1. l. 6. (n) Per 34. l. 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 68. — AD datam rectam (AB,) dato rectilineo (C.) æquale parallelogrammum (AI) applicare, deficiens parallelogrammo (ON) quod ſimile ſit alteri dato (D.) Oportet autem datum rectilineum (C) cui æquale applicandum eſt, non (*o*) majus eſſe parallelogrammo (AG) quod ad dimidiam datæ (AB) applicatur; ſimilibus exiſtentibus, & eo (AG) quod ad dimidiam applicatur, & (EF) defectu ejus, illi

(o) Per prec.

illi parallelogrammo (D) cui ſimile (ON) deficere
debet.

Biſecetur AB in E; & ſuper recta AE, (a) deſcribatur, pa-
rallelogrammo dato D, ſimile parallelogrammum AG, & com- (a Per
pleatur parallelogrammum AF. Erit quoque EF ipſi AG, ac 18. l. 6.
proinde dato D ſimile. Erit etiam EF ipſi AG ſimiliter poſitum,
& æquale. Et cum per determinationem, AG non ſit minus re-
ctilineo C, erit vel ei æquale, vel eo majus. Si ſit AG $=$ C,
factum eſt quod petebatur: Ad datam enim rectam AB dato re-
ctilineo C æquale parallelogrammum AG applicatur, deficiens
parallelogrammo EF, dato D ſimili.

Si vero parallelogrammum AG ſit rectilineo C majus; (b) in-
veniatur exceſſus ipſius AG vel EF, ſupra rectilineum C; & illi (b) Per ſ:r.
exceſſui æquale, ipſi vero EF ſimile & ſimiliter poſitum fiat (c) p.45. l. 1.
parallelogrammum KL, cum ipſo EF communem angulum ha-
bens G. Parallelogramma igitur EK, KL, circa eamdem diame- (c) Per 25. l. 6.
trum GIB (d) exiſtunt. Producatur KI ad M, N; & LI ad O; (d) Per
& erunt parallelogramma ON, EF, circa eamdem diametrum 26. l. 6.
GB, & (e) proinde ſimilia. Ergo (f) etiam ON ſimile eſt da-
to D. Et quoniam KL eſt exceſſus parallelogrammi EF ſupra (e) Per
datum rectilineum C; ſi itaque e parallelogrammo EF auferatur 24. l. 6.
KL, quod reliquum eſt æquale erit ipſi C; adeoque erit rectili- (f) Per 21. l. 6.
neum C æquale parallelogrammis EN, IF ſimul ſumptis, hoc eſt,
(propter EN (g) $=$ AK, & (h) IF $=$ EI) æquale paral-
lelogrammo AI. Ergo ad datam rectam AB, dato rectilineo (g) Per
C æquale parallelogrammum AI applicatur, deficiens paral- 36. l. 1.
lelogrammo ON, quod ſimile eſt dato D. Q. E. F. (h) Per 43. l. 1.

Scholium. Ex caſu 2. & cor. 1. prop. præced. emergit alia Fig. 67.
methodus hoc problema conſtruendi, ſi nempe, ſuper data
AB conſtitutis ut prius AG, EF dato D ſimilibus, pro-
ducantur ipſius EF latus EG & diameter BG, & cir-
ca hanc, in angulo ipſi EGF ad verticem oppoſito, fiat
(i) parllelogrammum SGTQ, æquale exceſſui ipſius AG
vel EF ſupra rectilineum C, ipſique EGFB ſimile, ſimi- (i) Per
literque poſitum. Unde ST erit ſimile, ſimiliter poſitum 25. l. 6.
& (k) æquale ipſi KL in conſtructione priori. Pro-
ductis AH, BF, QS, QT, compleantur paral- [K] Per axio 1. l. 1.
lelogramma AQ, PR: Erit (l) PR ſimile ipſi EF, ac (l) Per 24. l. 6.
proinde dato D. Et propter ST, KL ſimilia, ſimili-
ter poſita & æqualia, erit SG $=$ GL, hoc eſt, (m) (m) Per 34. l. 1.
PE $=$ EO. Unde (n) AP $=$ OB, & (o) AQ $=$ AI $=$ C. (n) Per
Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æquale pa- axio. 3. l. 1.
rallelogrammum AQ applicatur, deficiens parallelogram- [o] Per cor. 1. præc.
mo PR, quod ſimile eſt dato D.

Fig.70. Cor. 1. *Si parallelogrammum datum D quadratum ſit; problema ſic efferretur:* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato. *Et datę recta applicabitur rectangulum AI deficiens quadrato ON, vel rectangulum AQ deficiens quadrato PR. Unde, cum per hujus prop. (vel ſcholii) conſtructionem, rectangulum AI una cum quadrato KL, (vel rectangulum AQ una cum quadrato ST) æquale ſit quadrato AG vel EF; patet prop. 5. lib. 2. ex hac prop. 28. l. 6. immediate deduci. Sic enim exprimitur prop. illa 5 l. 2.* Si recta AB ſecta fuerit in partes æquales, AE. EB, & in partes inæquales AO, OB (vel AP, PB;) Erit rectangulum AI (vel AQ) ſub partibus inæqualibus, una cum KL (vel ST) quadrato partis intermediæ EO(vel EP,) æquale quadrato dimidiæ AE vel EB. *Quæ nihil aliud eſt, quam prop. hujus 28. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig.70. Cor. 2. *Data recta AB & rectilineo C, per hanc pr. 28. ejuſque ſcholium, habebitur OB vel PB, latus quadrati quo deficit rectangulum AI vel AQ, rectilineo C æquale, & ad datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita OB ponatur* T*; unde* $AN = AB \times T$, *&* $ON = Tq$*; ergo* $AI = AN\text{-}ON) = AB \times T - Tq = C$. *Atque idem omnino colligitur ſi ponatur* $T = PB$: *erit enim* $AQ = AR - PR = AB \times T - Tq = C$. *Atque hæc eſt prima (a) æquationum affectarum quadraticarum ſpecies ſive forma, quam ex hac prop. 28. ſolverunt Geometræ veteres, inveniendo quantitatem incognitam OB vel PB, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB & deficientis quadrato. Manifeſtum autem eſt, primam hanc formam, duplicem ſolutionem admittere: T enim vel per OB vel per PB explicari poteſt; quarum illa (OB) per propoſitionis, hæc (PB) per ſcholii conſtructionem invenietur. Patet etiam ex cor. 2. pr. 27. duas illas quantitates ſimul ſumptas (OP + PB) datæ rectæ AB æquales eſſe; unde ut utraque inveniatur, dupli conſtructione opus non eſt: inventa enim una quavis OB, altera AO vel PB ſimul innoteſcit.*

(a) *Vide Oughtredi Clav. Mathematicæ, cap. 16. n 9.*

Cor. 3. *Ipſa etiam regula qua ad hujus formæ ęquationes ſolvendum utuntur recentiores, ex hujus prop. 28. conſtructione*
Fig.70. *deducitur. Cum enim T ſit vel* $(PB =)\ AO$, *vel* OB, *ſitque* $AO = \frac{1}{2} AB + EO$, *&* $OB = \frac{1}{4} AB - EO$: *Et cum ſit* $EO = KI$; & *per conſtr. pr. 28.* $KIq = \overline{EBq - C} = $ (b) $\overline{\frac{1}{4} ABq - C}$, *erit* KI *vel* $EO = \sqrt{\overline{\frac{1}{4} ABq - C}}$. *Ergo T erit*

vel $AO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\overline{\frac{1}{4} ABq - C}}$,

vel $OB = \frac{1}{2} AC - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$.

(b) *Per cor. 3. p 4. l. 2.*

Atqui.

Digitized by Google

Atqui, pro æquatione $AB \times T - Tq = C$, *regula eſt* $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C} = T$. *Vide Oughtredum loco ſupra citato.*

Cor. 4. *Hinc in æquatione* $AB \times T - Tq = C$, *data recta AB & rectilineo C, expeditius invenietur T, ſi rectilineo C æquale* (a) *quadratum conſtruatur, cujus latus ex illa conſtructione inventum ſit V, cui ex E medio puncto datæ rectæ AB, perpendiculum æquale EX erigatur: tum centro X, radio* $XO = \frac{1}{2} AB$ *arcum circuli deſcribe, ſecantem AB in O: rectæ AO, OB erunt valores ipſius T: Nam* $T =$ (b) $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Sed per conſtr. eſt* $XOq = \frac{1}{4} ABq$, & $XEq = C$. *Ergo* EOq *ſive* (c) $XOq - XEq = \frac{1}{4} ABq - C$. *Ergo* $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, & $AO = \frac{1}{2} AB + EO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *ſicut &* $OB = \frac{1}{2} AB - EO = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. Fig. 71. (a) Per 14.l.2. (b) Per cor. 3. hujus. (c) Per 47.l.1.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (ML) quod ſimile ſit alteri dato (D.) Fig. 72.

Biſecetur AB in E, & ſuper recta EB (d) *deſcribatur parallelogrammo dato D ſimile parallelogrammum BEFG; atque ipſis C, EG ſimul ſumptis æquale, ipſi vero FEBG ſimile, ſimiliterque poſitum fiat* (e) *parallelogrammum FKIH commune cum illo habens angulum ad F. Erunt* (f) *igitur parallelogramma EG, HK circa eamdem diametrum FBI. Producantur AB, GB, ad L, M; Et cum ſimile ſit EG ipſi D per conſtructionem, atque* (g) *ipſi ML quia circa eamdem diametrum ſunt EG, ML; inde colligitur* (h) *ML ipſi D ſimile eſſe. Producta MK, compleatur parallelogrammum AM; eritque* $AK =$ (i) $KB =$ (k) *BH. Quare ſi æqualibus AK, BH commune adjiciatur KL; erit AI parallelogrammum æquale parallelogrammis KL, BH ſimul ſumptis. Parallelogrammum autem KH (hoc eſt,* $EG + KL + BH$*) æquale eſt ipſis* $EG + C$ *per conſtructionem: adeoque ſublato communi EG, erit* $C = KL + BH = AI$*. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum AI applicatur, excedens parallelogrammo ML, quod dato D ſimile eſt. Q. E. F.* (d) Per 18.l.6. (e) Per 25.l.6. (f) Per 26.l.6. (g) Per 24.l.6. (h) Per 21.l.6. (i) Per 36.l.1. (K) Per 43.l.1.

Digitized by Google

Fig. 73. Cor. 1. *Si parallelogrammum D ſit quadratum, problema poſtulat ut* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. *Et cum per conſtructionem, rectangulum AI una cum quadrato EG æquale ſit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediate deduci poſſe: nempe,* Si recta AB biſecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum ſub tota compoſita AL & adjecta BL ſive LI, una cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compoſitæ ex dimidia & adjecta. *Nihil enim aliud eſt hæc prop. 6. l. 2. quam propoſitionis 29. l. 6. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig. 73. Cor. 2. *Data recta AB & rectilineo C, per hanc prop. invenerunt veteres Geometræ latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: quæ latera apud recentiores Analyſtas,* (a) *per æquationum quadraticarum affectarũ ſecundæ ac tertiæ ſpeciei reſolutionem inveniuntur. Etenim ſi pro latere LI ponatur E, erit* $ML = Eq$ *&* $AM = E \times AB$: *ergo AI ſive* $C = Eq + E \times AB$: *quæ eſt tertia æquationum quadraticarum ſpecies, in qua per hanc prop. invenitur E ſive BL vel LI, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI ſive E, ſimul habetur latus alterum* $AL = AB + E$, *quod inveniunt recentiores, per reſolutionem æquationis quadraticæ, ſecundæ ſpeciei.*

(a) *Vide Outhredi Clav. cap. 16. n. 9.*

Fig. 73. Cor. 3. *Hæc etiam ſecunda æquationum affectarum quadraticarum ſpecies, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI (rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, ſic conſtrui poteſt. Deſcribatur* (b) *rectæ AL ſive IP quadratum IPQR, cujus pars ſit rectangulum AI. Et quoniam* $AL = IR$, *&* $BL = LI$, *erit* (c) $LR = AB$. *Jam ſi pro AL ponatur A, erit* $PR = Aq$, *&* $AR = A \times AB$; *unde AI ſive* $C = (PR - AR =)\ Aq - A \times AB$; *quæ eſt æquationum quadraticarum ſecunda ſpecies, per hoc corollarium conſtruenda.*

(b) Per 46. l. 1.
(c) Per axio. 3. l. 1.

Cor. 4 *Recentiorum* (d) *etiam regulæ, (ſc.* $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} + \frac{1}{2}AB = A$, *&* $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} - \frac{1}{2}AB = E$,) *quarum ope, ex æquatione* $Aq - A \times AB = C$, *invenitur A, & ex æquatione* $Eq + E \times AB = C$, *invenitur E, Ex hujus prop. conſtructione deduci poſſunt. Cum enim ſit* $EB = \frac{1}{2}AB$, *erit* $EG =$ (e) $\frac{1}{4}ABq$: *Et per conſtr. hujus,* $KH = EG + C = \frac{1}{4}ABq + C$, *cujus itaque latus KI ſive* $EL = \sqrt{\frac{1}{4}ABq + C}$, *cui ſi AE vel* $\frac{1}{2}AB$ *adjiciatur, erit AL ſive* $A =$

(d) *Vide Outhredum loco citato.*
(e) Per cor. 3. p. 4. l. 2.

Digitized by Google

$A = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB$. *Porro, ſi ab* $EI =$
$\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$ *auferatur* EB, *ſive* $\frac{1}{2}$ AB, *relinquetur*
BL *ſive* $E = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}\ \frac{1}{2} AB$.

Cor. 5. *Ex his autem regulis, in utralibet æquatione,* *Fig. 74.*
ſive $Aq - A \times AB = C$, *ſeu* $Eq + E \times AB = C$,
data recta AB, *& rectilineo* C, *expeditius invenientur* (a) *Per 14. l. 2.*
A *&* E, *ſi rectilineo* C *æquale quadratum* (a) *conſtruatur, cujus latus inde inventum ſit* N, *cui ex medio puncto rectæ datæ* AB, *æquale perpendiculum* EO *erigatur, & jungatur* OB, *cui æqualis in* EB *producta,* (b) *Per conſtruct.*
capiatur EL, *eritque* $AL = A$, *&* $BL = E$. *Cum* (c) *Per 47. l. 1.*
enim ſit $EOq =$ (b) C, *erit* $EBq + EOq = \frac{1}{4} ABq + C$ (d) *Per axio 15.*
$=$ (c) $OBq = ELq$. *Ergo* EL (d) $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, *&* AL (e) *Per axio. 2.*
$=$ (e) $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} = A$; *atque* $BL =$ (f) (f) *Per axio. 3.*
$\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$.]

PROPOSITIO XXX.

D*Atam rectam (AB) ita ſecare, ut tota (AB) ſit* *Fig. 76.*
ad unum ſegmentum (AC) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (CB.)

Hoc eſt, (ut loquuntur Geometræ,) lineam extrema ac media ratione ſecare.

[*Super data recta AB fiat quadratum AFSB, & ad* *Fig. 28. l. 1.*
rectam FA, quadrato FB æquale (g) *applicetur rectan-* (g) *Per 29. l. 6.*
gulum FOLI, excedens figura AL ipſi FB ſimili. AL itaque quadratum eſt. Et quoniam FL æquale eſt ipſi FB; ablato communi FC, erit $AL = OB$. *Et propter* (h) *Per 14. l. 6.*
angulos rectos, ac proinde æquales, OCB, ACL, (h)
erit $OC : CL :: AC : CB$. *Sed* $OC =$ (i) $AF = AB$, (i) *Per 34. l. 1.*
& $CL = AC$: *Ergo* $AB : AC :: AC\ CB$. *Factum eſt igitur quod petebatur.*

Aliter.] Per 11. 2. ita ſeca AB in C, ut rectangulum *Fig. 75. l. 6.*
ſub AB, CB. ſit æquale quadrato AC. Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, ſic AC ad CB.

Hujus ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione & comparatione.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 76. *SI a lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ ſimiles quæcumque deſcribantur , erit (F) ea quæ opponitur recto angulo, duabus ſimul reliquis (R , L) æqualis.*

Propoſitio igitur 47. l. 1. hic redditur univerſalis.

Ab angulo recto C dimittatur perpendicularis CO. Quoniam AB , BC , BO ſunt (*a*) tres proportionales , erit F ad ſibi ſimilem R, (*b*) ut AB prima ad BO tertiam. Rurſum quoniam (*c*) BA , AC , AO ſunt proportionales, erit F adſibi ſimilem L, ut (*d*) BA prima ad AO tertiam. Quia igitur eſt F ad R , ut Ab ad BO, & F ad L , ut AB ad AO , erit quoque F ad R & L ſimul ſumptas , ut (*e*) AB ad BO , AO ſimul ſumptas. Sed AB duabus BO , AO æqualis eſt. Ergo etiam F duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per cor.* 2. *p.* 8. *l.* 6.
(b) *Per cor.* 2. *p.* 20. *l.* 6.
(d) *Per cor.* 2 *p.* 10 *l.* 6.
(e) *Per* 24. 5.

Corollarium.

EX hac propoſitione facile dabitur quotcumque figuris ſimilibus rectilineis quibuſcumque una omnibus æqualis & ſimilis, eadem prorſus methedo, qua probl. 1. ſcholii poſt 47. l. 1. exibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonſtratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6. [*Et pari ratione , per prob. 2. ſcholii ejuſdem, dabitur figurarum ſimilium differentia ſimilis: hoc eſt, non tantum addi poſſunt, verum etiam ſubtrahi figuræ quævis ſimiles, minor a majore , eadem methodo qua quadrata adduntur vel ſubtrahuntur in ſcholio citato.*]

PROPOSITIO XXXII.

VIX *habet uſum , nec quidquam habet notabile.* [Eſt autem cor. 8. p. 26. prius , ne quis eam deſideret.]

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

IN *æqualibus circulis vel eodem, anguli ſive ad centra (ut ABC, FOD) ſive ad peripheriam (ut ARC, FSD) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (AKC, FGD) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus.* Fig. 77.

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo propoſitione 1. hujus libri demonſtratum eſt triangula æque alta eſſe ut baſes. Tantum ubi iſthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29. lib. 3. [*Item pro E iſthic, vertice trianguli DEF, hic ponitur O vertex anguli & ſectoris DOF; pro triangulis vero iſthic, ſubſtitue hic angulos ad centra B, O, itemque ſectores; & pro baſibus arcus.*

Quoties enim pars quavis aliquota ex. gr. pars tertia DG, arcus DF, continetur in arcu AC; toties eadem pars aliquota DOG, anguli DOF, continebitur in angulo ABC. Et manifeſtum eſt quamlibet aliam partem aliquotam arcus DF & anguli DOF, in arcu AC & angulo ABC, æquali ſemper numero reſpective contineri. Ergo, per rationem æqualium indicium illud Tacquetianum, pag. 122. 123. *erit angulus ABC ad angulum DOF, ut arcus AC ad arcum DF: Et eodem prorſus modo probabitur ſectorem ABC eſſe ſectorem DOF, ut arcus AC eſt ad arcum DF.*]

Quoniam vero ad peripheriam anguli R & S dimidii (*a*) ſunt angulorum ad centrum ABC, FOD, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis. (a) *Per 20. l. 3.*

Corollaria.

1. ANgulus centri (BAC eſt ad quatuor rectos, ut arcus BC cui inſiſtit, ad totam circumferentiam. *Fig. 78.*

Nam [*cum quatuor rectos, hoc eſt,* (b) *omnes angulos circa centrum A conſtitutos, metiatur tota circuli circumferentia, unum igitur angulum rectum BAF metietur totius circumferentiæ quadrans BF. Sed*] ut [*angulus*] BAC eſt ad rectum BAF, ita per hanc 33. arcus BC eſt ad quadrantem BF. Ergo (*c*) angulus BAC eſt ad 4. rectos, ut arcus BC eſt ad 4. quadrantes, hoc eſt ad totam peripheriam. (b) *Per cor. 3. pr. 13. l. 1. cum ſch. p. 23 l. 1.* (c) *Per 24. l. 5.*

2. Inæqualium circulorum arcus IL, BC, qui æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra ut IAL, & BAC, ſive ad peripheriam, ſunt ſimiles. [*Et converſim.*]

Nam

Nam [*primo*, *ponentur anguli æquales ad centra* ; *&*] arcus IL eſt ad ſuam peripheriam, ut (*a*) angulus IAL, hoc eſt ut BAC, ad 4. rectos ; & arcus BC eſt ad ſuam peripheriam (*b*) ut idem angulus BAC ad 4. rectos. Ergo IL (*c*) eſt ad ſuam peripheriam, ut BC ad ſuam. Ergo (*d*) ſunt ſimiles arcus IL & BC.

(a) Per cor. 1. (b) Per idem cor. (c) Per 11. l. 5. (d) Per def. 4. l. 6.

[*Si vero anguli æquales O, K fuerint ad circumferentias : fiant ſuper iiſdem arcubus anguli ad centra IAL, BAC*, (e) *eruntque hi etiam æquales : unde per primam partem arcus IL, BC ſimiles erunt*.

(e) Per 20. l. 3. & axio. 6. l. 1.

Et e converſo, inæqualium circulorum ſimiles arcus BC, IL ſubtendunt angulos æquales, ſive anguli illi ſint ad centrum ſeu ad circumferentiam, uti ex ipſa figura & prop. 20. *l.* 3. *ſatis patet*,].

3. Duæ ſemidiametri (AB , AC) a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles IL , BC. Patet ex coroll. 2.

4. [*Ductis rectis BC, IL*,] Segmenta (BKC , IOL) quæ angulos capiunt æquales (K , O ,) ſimilia ſunt. [*Et converſim*.]

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam arcus BKC, IOL ſimiles ſunt. [*Ergo* (f) *& ſegmenta BKC, IOL ſimilia ſunt*.

(f) Per def. 4. l. 6.

Item ſegmenta oppoſita ſimilia ſunt, propter arcus BC, IL ſimiles.

Et e converſo, ſegmenta ſimilia BKC, IOL capiunt angulos æquales K, O: Nam (g) *propter ſimiles arcus BKC, IOL, arcus oppoſiti BC, IL ſimiles erunt, & anguli*, K, O, *ſuper ipſis* (h) *æquales*.

Item, anguli in ſegmentis BC, IL ſunt æqualium angulorum K, O (i) *complementa ad duos rectos, atque inde æquales erunt*.

[g] Per def. 4. l. 6. (h) Per cor. 2. hujus. [i] Per 22. l. 3.

5. *Similia ſegmenta ſuper eadem recta, vel æquali, ſunt æqualia. Patet ex cor. præced. ſchol. p.* 21. *l.* 3. *& axio.* 7. *l.* 1. *Continet autem hoc corollarium propoſitiones* 23. *&* 24. *l.* 3. *a Tacqueto omiſſas. Prop. enim* 23. *ita effertur*: Super eadem recta linea, duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia, ex eadem parte non conſtituentur. *Et prop.* 24. *ita* : Super æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

6. *Ex hac etiam prop. ejuſque corollariis deducitur angulorum conficiendorum & menſurandorum praxis facillima, prout in ſcholio poſt prop.* 23. *lib.* 1. *latius explicatur*.

Scholium,

Scholium. *Poſtulat hic locus, ut fidem libro quarto præſtitam jam liberem, Elementi* 13. *propoſitionem* 10. *demonſtrando, quæ ita ſe habet:* Quadratum lateris AB pentagoni ordinati ABCDE circulo inſcripti, æquatur quadratis e latere hexagoni & e latere decagoni eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. *Ducta enim diametro AG, & ratio FB; a centro F lateri AB perpendicularis demittatur FH, quæ producta circolo occurrat in K: Illa arcum AKB, (hoc eſt* (a) *quintam partem totius circuferentiæ) bifariam dividet* (b) *in K. Junge BK, KA; & cum ſit arcus AK pars decima totius circumferentiæ, erit AK recta,* (c) *latus decagoni ordinati huic circulo inſcripti. A centro F, ipſi AK perpendicularis demittatur FN, quæ producta circulo occurrat in M; hæc arcum AMK bifariam dividet in M, & latus pentagoni BA ſecabit in L. Junge KL. Ob ſemiperipherias ABG, AEG æquales, & arcus ABC, AED æquales; erit arcus CG ipſius CGD, vel AKB dimidius; unde arc. CG* = *arc. AK* = 2 *arc. KM. Item, arc. CB* = *arc. AB* = 2 *arc. BK. Ergo arc. CG* + *arc. CB* = 2 *arc. MK* + 2 *arc. KB, hoc eſt, arc. BCG* = 2 *arc. BKM, & ang. BFG* = (d) 2 *ang. BFM. Sed in triangulo ABF, ang. externus BFG* = (e) *ABF* + *BAF, hoc eſt, (ob æquales AF, BF)* (f) = 2 *ang. ABF* = 2 *ang. BAF* = *(prius)* 2 *ang. BFM vel LFB. In triangulis igitur LFB, FAB, ob angulos BFL, BAF æquales, & angulum ad B communem,* (g) *etiam ang. BLF* = *ang. BFA, &* (h) *AB: BF :: FB: BL. Unde* (i) *rect. ABL* = *BFq. Porro, in triangulis ALN, KLN, ob angulos ad N rectos, & latera AN, NK* (k) *æqualia, & LN commune,* (l) *erit AL* = *LK, & ang. LAK* = *ang AKL. Sed & ang KBA* = (m) *ang. KAB vel LAK ſive AKL: ergo in triangulis BAK, KAL, propter angulum ad A communem, & angulos ABK, AKL æquales, erit ang. AKB* = (n) *ang. ALK, & triangula BAK, KAL erunt ſimilia: unde BA: AK :: KA: AL, & rect. BAL* = *AKq. Sed rect. ABL* + *rect. BAL* = (o) *ABq. Ergo ABq* = *BFq* + *AKq. Sed BF eſt circuli radius, & proinde* (p) *latus hexagoni ordinati circuli inſcripti; & AK eſt latus decagoni ordinati eidem circulo inſcripti. Ergo quadratum ex latere pentagoni ordinati æquatur quadratis e latere hexagoni ordinati & e latere decagoni ordinati, eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. Q.E.D.*]

Fig. 79.

(a) Per 26. l. 3.
(b) Per 30. l. 3.
(c) Per 27. l. 3.
[d] Per 33. l. 6.
(e) Per 32. l. 1.
(f) Per 5. l. 1.
[g] Per cor. 9. p. 32. l. 1.
[h] Per 4. l. 6.
[i] Per 17. l. 6.
[K] Per 3. l. 3.
[l] Per 4. l. 1.
(m) Per 29. l. 3.
(n) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
[o] Per 2. l. 2.
(p) Per cor. 1. p. 15. l. 4.

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER UNDECIMUS.
NOBIS SEPTIMUS.

SEX libris primis ſubjungit Euclides elementa numerorum tribus ſequentibus ſeptimo , octavo & nono comprehenſa , quibus etiam decimum de quantitatibus incommenſurabilibus adjungit . Nos a planis immediate tranſimus ad ſolida ; de numeris ſeorſim tractaturi . Id opinor , diſcentibus commodius erit ſi elementa Geometriæ nulla alia tractatione interrupta , ſimul omnia habeantur . Nihilominus cum citabimus propoſitiones hujus & ſequentis libri , eos non ſeptimum & octavum , ſed undecimum & duodecimum appellabimus , ne , ſi ab ordine Euclideo ubique recepto diſcedamus , propoſitionum citatio implicatior reddatur .

Hic liber duas quodammodo partes complectitur . In prima jaciuntur fundamenta , quibus ſolidorum , hoc eſt , corporum doctrina univerſa nititur . Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur .

P*Rima ſolidorum Principia* Undecimus *hicce Elementorum Liber proponit . Neque ſane Corporum proprietates ſine eo cognoſci queunt : & ſi Mathematum partes pleraſque omnes ſine ſolidorum ſcientia aggrediamur , fruſtra erimus . Doctrina enim Theodoſii Sphærica , Trigonometria etiam Sphærica , pars magna Geometriæ Practicæ , Statica , atque Geographia eidem innituntur ; & quæ occurrent paulo difficiliora in Gnomonica , Sectionibus Conicis , Aſtronomia , Perſpectiva , atque Optica univerſa , intellectis rite ſolidorum principiis , faciliora redduntur . Adeo ut qui Geometriæ Elementa , omiſſis fere & poſthabitis hoc & ſequenti libro , tradiderunt , eadem manca admodum , atque plane imperfecta tradidiſſe ſint cenſendi .*

DEFI-

DEFINITIONES.

1. SOlidum ſive corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum eſt ſuperficies.

3. Linea recta (AB) eſt ad planum (CC) recta ſive perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (CA) in plano (CC) ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.) *Fig. 1 l. 11.*

4. Planum ad planum rectum ſive perpendiculare eſt, cum omnes rectæ lineæ (LQ,) quæ communi planorum ſectioni (XR) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ ſunt alteri plano (ABCO.) *Fig. 2.*

5. Si recta linea (OL) plano inſiſtat non ad rectos angulos, & a ſublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP, jungaturque PQ; angulus LOP dicitur inclinatio lineæ OL ad planum. *Fig. 3.*

6. Si planum (RE) plano (OQ) non inſiſtat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio eſt acutus angulus (ABC) qui continentur a rectis lineis (AB & BC) quæ in utroque plano ad communem ſectionem (OE) ducuntur perpendiculares. *Fig. 4.*

7. Planum ad planum ſimiliter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

[*Et eodem modo, recta linea ad planum ſimiliter inclinatur, ac alia recta ad idem vel aliud planum, ſi inclinationum anguli def. quinta deſcripti, fuerint æquales.*]

8. Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta, æqualibus ſemper intervallis diſtant.

9. Similes figuræ ſolidæ rectilineæ ſunt, quæ ſimilibus planis continetur, multitudine æqualibus.

10. Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus quam duobus planis angulis BAC, CAO, OAB) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur, *Fig. 5.*

11. Æquales ſolidi anguli ſunt, qui intra invicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. l. 3.

12. Priſma eſt figura ſolida, planis comprehenſa, quorum adverſa duo (OFE, ACB) ſunt parallela, æqualia & ſimilia. *Fig. 6 7. 8.*

13. Pa-

Digitized by Google

Fig. 8. 13. Parallelepipedum eſt ſolidum ex quadrilateris ex adverſo parallelis comprehenſum.

14. Si ſex plana ex adverſo parallela ſint quadrata, ſolidum iis comprehenſum cubus erit.

[15. *Æquales & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.*

Hanc definitionem (Euclidi decimam) perperam omittit noſter; atque inde propoſitionum 25. & 28. demonſtrationes Tacquetianæ videntur eſſe minus accuratæ.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 9. R*Ectæ lineæ pars una (AC) nequit eſſe in ſubjecto plano (OE,) altera (CB) extra planum.*

Per ſe clarum eſt ex definitione plani & lineæ rectæ. Vide defin. 7. & 4. l.1.

PROPOSITIO II.

Fig. 10. O*Mne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuo ſecantes in eodem plano ſunt.*

Prima pars per ſe clara eſt, cum triangulum nihil ſit aliud quam plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam [*& ex prop. præced.*] patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Fig. 11. S*I duo plana (AB, CD) ſe mutuo ſecant; (EF) communis eorum ſectio eſt recta linea.*

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare. Si EF ſectio communis non eſt recta linea; ducatur in plano CD recta EOF, & in plano AB recta EQF. Duæ igitur rectæ EOF, EQF claudent ſpatium. Quod eſt abſurdum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI recta (BA) duabus rectis (CAX , FAS) ſe mutuo ſecantibus perpendicularis exiſtat ; etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit. Fig. 12.

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF ſit perpendicularis. Junge AQ, & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hæc producta, neceſſario ſecabit aliquam rectarum CAX, FAS, vel utramque, ubicumque tandem fuerit punctum Q. [*Si enim recta QO, rectarum alterutri FAS parallela ſit ; QO ſecabit* (a) *alteram CAX : ſi vero neutri illarum ſit parallela, ſecabit* (b) *utramque.*] Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus eſt ; (a) *Per cor. 2. ſch. poſt p.31. l.1.* (b) *Per cor. 1. ſch. poſt p.31. l.1.*

erit quad. BO Æ. (*c*) quad. BA, quad. AO. (c) *Per 47. l. 1.*

Sed quia BQ ponitur recta plano FAC, ac proinde (*d*) rectum facit cum AQ angulum BQA ; eſt (d) *Per def. 3. l. 11.*

quad. BA (*e*) Æ. quad. BQ, quad. AQ. (e) *Per 4.*

Et quia angulus AQO per conſt. rectus eſt ;

quad. AO Æ. (*f*) quad. OQ, quad. AQ. (f) *Per 7. eand. l. 1.*

Ergo quad. BO Æ. quad. BQ, quad. OQ, quad. AQ bis.

Ergo quad. BO majus eſt [*quadratis*] BQ & O Q ; ac proinde (*g*) angulus BQO rectus non eſt. Ergo BQ non eſt recta (*h*) plano CAF. Liquet ergo quæſitum. [g] *Per cor. 4. p. 47. l. 1.* [h] *Patet ex def. 3. l. 11.*

Scholium.

EX eo quod ponebatur BQ eſſe recta plano FAC ; directe eſt demonſtratum BQ non eſſe rectam plano FAC : ac proinde ex eo quod negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directe probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Joannis Ciermans.

Digitized by Google

PROPOSITIO V.

Fig. 13.

SI tres rectæ (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano.

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum una BA in alio plano RO, quod ſecet LQ planum duarum reliquarum CA, FA, recta AO. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus CA, FA, plano LQ recta (a) erit. Ergo cum AO rectum facit (b) angulum RAO. Sed etiam ex hyp. angulus RAB rectus eſt. Ergo anguli RAB & RAO æquales ſunt. Quod eſt abſurdum.

[a] Per 4. [?] rec. (b) Per def. 3. l. 11.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14.

LIneæ rectæ (AB, CD) quæ eidem plano (EF) ſunt perpendiculares; inter ſe ſunt parallelæ.

Poſtulari poterat ut per ſe notum; licebit tamen ſic demonſtrare.

Juncta BD; fac in plano FE, lineam DG normalem ad BD & parem BA; junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG æquantur BD, (c) BA; & anguli BDG, (d) DBA ſunt recti. Ergo AD, BG (e) ſunt æquales. Igitur triangula ABG, GDA ſibi mutuo æquilatera ſunt, ac proinde anguli ABG, ADG (f) æquales. Sed ABG (g) rectus eſt. Quare & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex conſtr. & GDG per definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD, recta eſt. Ergo CD cum AD, BD eſt in uno (h) plano. Sed etiam AB cum AD, BD (i) in uno plano eſt. Ergo AB, CD ſunt in uno plano. Ergo cum anguli ABD, CDB ſint (k) recti, erunt AB, CD (l) parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per conſtr. (d) Per def. 3. l. 11. (e) Per. 4. l. 1. (f) Per 8. l. 1. (g) Per def. 3. l. 11. (h) Per pre. (i) Per 2. l. 11. (K) Per def 3. l. 11. (l) per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15.

REctæ (EF) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano, in uno eſt cum ipſis plano.

Poſtulari poterat. Qui volet ſic demonſtret.

[Si

[*Si recta EF non eſt in plano rectarum AB,CD; per puncta E, F in illo plano* (a) *ducatur recta EGF. Duæ igitur rectæ EF, EGF ſpatium includunt; quod eſt* (b) *abſurdum.* (a) Per poſtulat. 1. (b) Per axio 13.

Aliter.] Planum rectarum AB, CD fecet aliud planum per puncta E, F. Si jam EF non eſt in plano AB, CD, non erit EF communis ſectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF (c) eſt linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt ſpatium. Quod eſt abſurdum. (c) Per 3. l. 11.

Corollarium.

Hinc ſequitur, ſi EF ſecat parallelas AB, CD, in eodem eſſe cum ipſis plano; omnes enim parallelæ, [*hoc eſt, duæ quævis*] (*d*) ſunt in uno plano. (d) Per. def. 30. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

Si parallelarum (AB, CD) una (AB) plano (EF) ſit recta; etiam altera (CD) eidem plano erit recta. Fig. 14.

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur, fere ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

[*Ductis BD, AD, in plano EF, fac GD normalem ad BD, & parem ipſi BA; junctiſque GA, GB, oſtendetur ut in demonſtr. prop.* 6. *rectam GD etiam ad AD normalem eſſe. Ergo GD* (e) *recta erit plano ABD, hoc* (f) *eſt, plano CDBA. Quare angulus CDG* (g) *rectus eſt. Sed angulus CDB eſt etiam rectus, (utpote cum angulo ABD recto, duos rectos* (h) *conficiens.) Ergo CD* (i) *perpendicularis eſt plano GDB, ſeu EF. Quod erat demonſtrandum.*] (e) Per 4. l. 11. [f] Per cor. præc. [g] Per def. 3. l. 11. [h] Per 17. l. 1. [i] Per 4. l. 11.

PROPOSITIO IX.

Rectæ (AB, EF) quæ ſunt eidem rectæ (CD) parallelæ; licet non in eodem cum illa plano etiam ſunt inter ſe parallelæ. Fig. 16.

Quamvis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare. In plano parallelarum AB, CD, duc GK normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD, duc HK normalem ad CD, [*& junge GH.*] Ergo (k) GK recta eſt plano GKH. [K] Per 4. l. 11.

Digitized by Google

GKH. Ergo cum AG, EH ſint parallelæ ad CK, erunt AG, EH (*a*) rectæ plano GKH. Ergo AG, EH, (*b*) ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 8. l. 11. (b) Per 6. l. 11.

PROPOSITIO X.

Fig. 17. *SI duæ rectæ (AC, BC) ſint parallelæ duabus rectis DF, FF, licet non ſint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt.*

Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cum AC, FD ſint parallelæ & æquales, etiam AD, CF (*c*) parallelæ ſunt & æquales. Similiter oſtendam BE, CF eſſe parallelas & æquales. Ergo etiam AD, BE ſunt (*d*) parallelæ & (*e*) æquales. Æquantur (*f*) ergo AB, DE. Cum igitur triangula BAC, EDF ſibi mutuo ſint æquilatera, anguli C & F (*g*) æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per 33. l. 1. [d] Per præc. (e) Per axio. 1. (f) Per 33. l. 1. (g) per 8. l. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18. *AD planum* [infinitum] *datum (AB, a dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.*

Conſtr. In plano AB duc [*infinitam*] quamvis DF, ad quam ex G perpendicularem (*h*) deſcribe CE. Ad eamdem per E, in plano AB, perpendicularem (*i*) duc AEM. Tum ad AM ex C perpendicularem (k) demitte CG. Dico CG plano AB rectam eſſe.

Per G ponatur HG parallela ad DF.

Per conſt. DE recta eſt ad CE & EM. Ergo DE recta (*l*) eſt plano CEM: adeoque & (*m*) HG. Ergo (*n*) CG recta eſt ad HG. Sed & CG ex conſt. recta eſt ad EM. Ergo CG (*o*) recta eſt plano AB. Quod erat propoſitum.

[Corollarium. *Perpendicularis CG a puncto C ad planum AB ducta, breviſſima eſt omnium rectarum quæ ab illo puncto ad planum duci poſſunt. Ducatur enim ab eodem puncto ad planum quavis alia recta CE, & jungatur EG: in triangulo CEG angulus EGC* (p) *rectus eſt; ergo angulus CEG eſt* (q) *acutus, ac proinde latus CE latere CG* (r) *majus eſt: & eodem modo demonſtrabitur aliam quamvis rectam a puncto C ad planum dictam, perpendiculari CG majorem eſſe. Ergo CG eſt omnium breviſſima.*]

[h] Per 12. l. 1. [i] Per 11. l. 1. [K] Per 12. l. 1. [l] Per 4. l. 11. [m] Per 8. l. 11. [n] Per def. 3. l. 11. (o) Per 4. l. 11. (p) Per def. 3. l. 11. [q] Per cor. 5. p. 32. l. 1. [r] Per 29 l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XII

EX *dato plani* (*EF*) *puncto* (*A*,) *rectam ad datum planum erigere.* Fig. 19.

A quovis extra planum EF puncto D, fac DB ad planum (a) EF rectam. Junctaque BA, duc AC parallelam DB. Dico factum. Demonſtratio patet ex 8. (a) Per prec.

Scholium.

PRactice per datum punctum [*K in plano dato EF*] perpendicularis ducitur dato plano, ſi norma OKN [*angulo ſuo recto K*] ad datum punctum, [*& latere O K ad datum planum ita*] applicetur, [*ut ſuper plano dato, latus OK circa latus alterum immobile KN, circumrotari queat: recta enim ſecundum KN ducta,* (b) *erit ad planum datum, ex dato puncto K, erecta perpendicularis.*] (b) Per 4. l. 11.

PROPOSITIO XIII.

LInea rectæ *ex eodem puncto* (*C*) *ductæ* (*DC*, *EC*,) *nequeunt ambæ ad idem planum* (*AB*) *eſſe rectæ.* Fig. 20.

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non poteſt.

[Scholium. *Ex hac prop. demonſtrari poteſt prop.* 38. *hujus l.* 11. *a Tacqueto omiſſa, quæ ita ſe habet:* Si planum FR ad planum BO rectum fuerit, & ab aliquo puncto L in planorum alterutro FR ad alterum planum BO perpendicularis ducatur; ea in communem planorum ſectionem XR cadet. *Ducatur enim a puncto L, communi ſectioni XR perpendicularis LQ;* (c) *erit ea plano BO recta. Sed per hanc pr. ex eodem puncto L duæ lineæ rectæ nequeunt ad idem planum OB eſſe rectæ; adeoque linea recta LQ, quæ ſola a puncto L ad planum OB perpendicularis duci poteſt, cadet* (d) *in ſectionem communem* XR.] Fig. 2. (c) Per def. 4. l. 6. (d) Per conſtruct.

PROPOSITIO XIV.

SI *eadem recta* (*AB*) *ad duo plana* (*FG*, *LQ*) *perpendicularis eſt; plana erunt parallela.* Fig. 21.

 Sumatur

Digitized by Google

Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum
C, ex quo ducatur CE parallela ad AB, occurrens plano
(a) Per 8. l. 11. LQ in E. Erit CE etiam (a) recta plano utrique FG,
(b) Per def. 3. l. 11. LQ. Quare ſi jungantur rectæ AC, BE, erunt anguli
A, B (b) recti. Ergo AC, BE ſunt (c) parallelæ. Ergo
(c) Per 29. l. 1. ACEB parallelogrammum eſt, ac proinde CE, quam
jam oſtendi utrique plano eſſe perpendicularem, æqua-
(d) Per 34. l. 1. tur (d) AB. Eodem modo oſtendam omnes utrique plano
(e) Per def. 8. l. 11. perpendiculares eſſe æquales. Ergo plana (e) ſunt paral-
lela. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 22. *SI rectæ duæ ſe mutuo tangentes (BA, CA) ad duas alias ſe mutuo tangentes (ED, FD) ſint parallelæ; etiam plana per ipſas ducta erunt parallela.*

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponantur-
(f) Per 9. l. 11. que GH, GI, parallelæ ad DE, DF. Erunt hæ (f)
(g) Per def. 3. l. 11. parallelæ etiam ad AB, AC. Cum igitur anguli IGA,
HGA, ſint (g) recti, erunt etiam (h) CAG, BAG
(h) Per 27. l. 1. recti. Ergo GA, quæ ad planum EF eſt recta, etiam
(i) Per 4. l. 11. recta (i) eſt plano BC. Ergo plana (k) BC, EF ſunt
parallela. Quod erat demonſtrandum.
(k) Per præc.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23. *PLanum (EHFG) ſecans parallela plana (AB, CD,) in iis facit ſectiones (EH, GF) parallelas.*

SI non, cum ſint in eodem plano ſecante, convenient
[l] Per cor. 1. poſt 31. l. 1. (l) alicubi in I. Quare cum totæ HEI, FGI ſint (m) in
[m] Per 1. l. 11. planis AB, CD productis, etiam hæ convenient in I.
Quod eſt abſurdum, contra definitionem 8. hujus.

Fig. 17. Schol. *Si duorum planorum AF, BF cum plano tertio AE interſectiones AD, BE ſint parallelæ; erit etiam mutua ipſorum AF, BF interſectio CF, ipſis AD, BE parallela. Secentur enim hæc tria plana planis parallelis ABC,*
[n] Per hanc prop. *DEF; eruntque* (n) *AB, BC, CA, ipſis DE, EF, FD*
[o] Per 10. l. 11. *reſpectivè parallela. Ergo* (o) *ang. ABC = DEF, & ang.*
BAC = ang. EDF. Sed & (propter parallelogrammum AE)
[p] Per 34. l. 1. *erunt* (p) *AB, DE æquales, Ergo* (q) *& BC = EF, &*
[q] Per 26. l. 1. *CA = FD. Parallelas autem eſſe BC ipſi EF, & CA*
ipſi

Digitized by Google

ipſi FD, oſtenſum prius. Ergo (a) *CF ipſis AD, BE,* (a) *Per 33.*
parallela eſt.]

PROPOSITIO XVII.

PArallela plana rectas lineas (BD & GH) proportionaliter ſecant. *Fig. 24.*

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, GD: [*ducatur*] item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD ſecans parallela plana, facit ſectiones CF, DG (*b*) parallelas. Ergo eſt BC ad CD, ut (*c*) BF ad FG. Rurſum, triangulum BHG ſecans parallela plana, facit ſectiones (*d*) BH, FI parallelas. Ergo eſt HI ad IG, ut (*e*) BF ad FG; hoc eſt, (quod jam oſtendi,) ut BC ad CD. Quod erat demonſtrandum.

(b) *Per pr.* (c) *Per 2 l. 6* (d) *Per prec.* (e) *Per 2. l. 6.*

PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea (FE) ſit ad planum (AB) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur plana, ſunt eidem plano (AB) recta. *Fig. 25.*

Ductum ſit per FE planum aliquod GC faciens cum AB ſectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD ſectionem communem. Cum igitur etiam (*f*) FE recta ſit ad CD; erunt KH (*g*) parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & HK rectæ (*h*) ſunt plano AB. Ergo GC planum (*i*) plano AB rectum eſt.

(f) *Per hyp & defin. 3. l. 11.* (g) *Per 29. l. 1.* (h) *Per 8. l. 11.* (i) *Per def. 4. l. 11.*

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (MF, GD) ſe ſecantia, ſint ambo recta eidem plano (AB ;) erit etiam communis illorum ſectio (KL) recta plano (AB.) *Fig. 26.*

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB; ex def. 4. patet ex puncto L poſſe in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe quæ ex L eſſet in plano MF perpendicularis ad communem ſectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD poſſe duci ex puncto L per-

Digitized by Google

(a) Per 13. l. 11.

pendicularem plano. Sed ex puncto L tantum (*a*) una poteſt duci perpendicularis plano AB. Ergo neceſſe eſt ut recta quæ ex L perpendicularis eſt plano AB, exiſtat in utroque plano MF & GD, ac proinde ſit ipſa planorum MF & GD communis ſectio LK. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27.

SI angulus ſolidus (A) tribus planis Angulis (BAC, CAD, DAB) continetur, horum duo quilibet reliquo ſunt majores.

Si tres plani ſunt æquales; patet aſſertio: Si inæquales, maximus eſto BAD. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abſcinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipſis AB, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam anguli (*b*) BAE, BAC æquales ſunt, & latera BA, AE æqualia lateribus BA, AC, etiam baſes BE, BC æquales (*c*) erunt. Quoniam vero BC, CD (*d*) majores ſunt quam BD, ablatis æqualibus BE, BC, remanet CD major quam ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus (*e*) CA, AD. Ergo angulus (*f*) CAD major eſt quam EAD. Cum igitur BAC, par ſit oſtenſus BAE. Erunt duo ſimul BAC, CAD majores toto BAD. Quod erat demonſtrandum.

(b) *Per conſtr.*
(c) *Per 4. l. 1.*
(d) *Per 20. l. 1.*
(e) *Per conſtr.*
(f) *Per 25 l. 1.*

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28.

PLani anguli, ſolidum angulum quemcumque componentes, quatuor rectis ſunt minores.

Eſto ſolidus angulus A. Planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur (*g*) pyramis, cujus baſis eſt polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Jam vero quia duo anguli ABF, ABC (*h*) majores ſunt uno FBC, & duo ACB, ACD majores uno BCD, & ſic deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L circa baſim anguli ſimul ſumpti, omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baſeos una cum quatuor rectis, faciunt bis tot rectos (*i*) quot ſunt latera, ſive quot triangula.

(g) *Vide def. 2. l. 12.*
(h) *Per prec.*
(i) *Per theor. 2. ſch. prop. 32. l. 1.*

Digitized by Google

gula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli, una cum quatuor rectis, conficiunt amplius quam bis tot rectos quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim, una cum angulis qui componunt ſolidum, conficiunt bis *(a)* tot rectos quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes, quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex* 32. *l.* 1.

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatis colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint majores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX haceadem propoſitione demonſtratur celebre theorema, tres tantum figuras planas ordinatas, & æquales, corpus ordinatum continere poſſe, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. Pentagona 12. Ac proinde quinque tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora: Pyramis, quæ 4. Octaedrum quod 8. Icoſaedrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaedrum quod 12 æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicitur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonſtr. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus: ad hoc enim ſaltem *(b)* requiruntur tres.

[b] *Per def.* 10 *l.* 11.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaedri; ex quinque, angulus ſolidus Icoſaedri; cum æquilateri trianguli anguli tum 3 tum 4 tum 5. ſint 4. rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam vero tres anguli pentagonici *(c)* ſunt 4. rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempe Dodecaedri.

[c] *Colligitur ex cor.* 1. *p* 12. *l* 4.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos. Unus enim

Digitized by Google

(a) *Per cor. 11. p. 32. l. 1.*

enim facit duas (*a*) tertias recti, ac proinde ſex tales efficient 12. tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo, a ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multo minus a pluribus.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multo minus a pluribus, per ſe patet.

(b) *Per cor. 1. pr. 11. l. 4.*

Anguli pentagonici 4. ſunt 4. rectis majores: Singuli enim efficiunt 6. quintas (*b*) recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multo minus a pluribus.

(c) *Per cor. 2. p. 15 l. 4.*

Nec ſane ex aliis figuris quibuslibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici ſunt 4. recti æquales. Unus enim (*c*) facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc eſt 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multo minus a pluribus.

Cum vero tres anguli hexagonici ſint 4. rectis æquales; tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut heptagoni, octogoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas omnes, eſſe ineptas ut ſolidum angulum conſtituant; adeoque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari poſſe.

[*PROPOSITIO* XXII.

Fig. 19.

Si fuerint tres anguli (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo ſint majores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales (AD ═ AE ═ BF ═ BG ═ CH ═ CI;) fieri poteſt ut ex rectis DE, FG, HI) æquales illas jungentibus, triangulum conſtituatur.

Si rectæ jungentes fuerint æquales, patet ex iis triangulum conſtitui poſſe. Sint autem inæquales, & maxima ſit DE *: ſi tamen* DE *minor fuerit duabus reliquis* FG + HI *; triangulum ex illis conſtrui* (d) *poteſt. Eſt autem minor. Nam ſuper recta* CH *fiat angulus* HCK *ipſi* B *æqualis, ſitque* CK ═ CH, *& jungantur* KH, KI. *Et propter rectas* KC, CH *rectis* FB, BG *reſpective æquales, & ang.* KCH ═ *ang.* B, *erit* (e) KH ═ FG. *Et cum ang:* B + *ang.* HCI, *hoc eſt,* (f) *ang.* KCI *major* (g) *ſit angulo* A, *latera autem* KC, CI *lateribus* DA, AE *æquantur reſpective; ergo baſis* KI *baſi* DE *major* (h) *eſt. Sed ſumma laterum* KH + HI (*hoc eſt,* FG + HI) *major eſt* (i) *quam* KI; *& proinde multo major quam* DE. *Ergo, &c.*

(d) *Per 22 l. 1.*
(e) *Per 4. l. 1.*
[f] *Per conſtr.*
(g) *Per hyp.*
(h) *Per 24. l. 1.*
[i] *Per 20. l. 1.*

Scholium.

Scholium. *Sint tria triangula iſoſcelia ADE, BFG, CHI, quorum crura AD, AE, BF, BG, CH, CI ſint inter ſe æqualia, & anguli verticales A, B, C ſimul ſumpti ſint quatuor rectis minores, ita tamen ut duo quilibet reliquo ſint majores: a baſibus autem DE, FG, HI conſtituatur* (a) *triangulum LMN, ita ut ſit* $LM = DE$, $MN = FG$, $NL = HI$; *ſuper quibus concipiantur triangulorum iſoſcelium latera bina quævis contigua in unam rectam coaleſcere, nempe CI & AD in PL, AE & BF in PM, BG & CH in PN; & ab angulis planis A, B, C, formabitur angulus ſolidus P; & æquabuntur rectæ PL, PM, PN. His præmiſſis, ſi triangulo LMN* (b) *circumſcribatur circulus; perpendicularis PO ab angulo ſolido ad planum circuli demiſſa, in centrum cadet.*

Fig. 29, 30. (a) Per hanc prop. & 22. l. 1. (b) Per 5. l. 1.

Ductis enim OL, OM, ON; in triangulis rectangulis OPL, OPM, OPN, erit (c) $PLq = POq + OLq$, $PMq = POq + OMq$, $PNq = POq + ONq$. *Si igitur a quadratorum* (d) *æqualium ſingulis PLq, PMq, PNq, auferatur POq, reſtabunt æqualia OLq, OMq, ONq; atque inde æquales erunt OL, OM, ON. Ergo circulus tranſiens per L, M, N, centrum* (e) *habet in O.*

(c) Per 47. l. 1. (d) Per ax. 15. l. 1. (e) Per 9. l. 3.

Porro, *manifeſta eſt propoſitionis veritas, ſive triangulum LMN fuerit acutangulum, ſeu rectangulum, ſeu denique obtuſangulum. Vide ſchol. p. 5. l. 4. & confer. fig. 5, 6, 7. ejuſdem libri cum fig. 30. hujus.*

Corol. ad Schol. præced. *Poſitis hujuſmodi triangulis iſoſceliis ADE, BFG, CHI; ſi ex eorum baſibus conſtituatur triangulum LMN; erit crurum æqualium quodvis AD, vel AE, vel BF, &c.) majus radio circuli circa triangulum LMN conſcripti, Nam AD =* (f) *PL; & in triangulo rectangulo OPL, latus PL angulo recto oppoſitum, majus* (g) *eſt quam OL quod opponitur* (h) *acuto.*

(f) Per conſtr. (g) Per 19. l. 1. (h) Per cor. 5. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXIII.

EX tribus angulis planis (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo ſunt (*i*) majores, angulum ſolidum (P) conſtituere. Oportet autem (k) tres illos angulos quatuor rectis minores eſſe.

Fig. 29, 30. (i) Ex p. 20. l. 11. (K) Per 21. l. 11.

Fac omnia angulorum latera (*nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI*) *æqualia inter ſe. Junctis DE, FG, HI, conſtitue* (l) *triangulum LMN* (*cujus latera LM, MN, NL, ipſis DE, FG, HI æquentur reſpective,*) *circa quod circulum* (m) *deſcribe, cujus radius ſit OL. Et cum angulorum A, B, C latera ſingula radio OL* (n) *ſint majora; erit etiam ADq majus*

(l) Per 22 l. 11. & 22. l. 1. (m) Per 5. l. 4. (n) Per cor. ad ſchol. præced.

quam

Digitized by Google

[a] Per prob. 2. ſchol. p. 4. l. 1. [b] Per 12. l. 11. (c) Per 47. l. 1. (d) Per conſtr. [e] Per 8. l. 1.

quam OLq. *Inveniatur* (a) OP *latus quadrati quo* ADq *excedit* OLq, & *a centro* O *erigatur* (b) OP *circuli plano recta, junganturque* PL, PM, PN. *Dico factum. Cum enim angulus* O *in triangulo* OPL *rectus ſit; erit* PLq = (c) POq + OLq = (d) ADq. & PL = AD. *Eodem modo demonſtrabitur rectam* PM *ipſi* AE *æqualem eſſe: Et cum ſit* LM = DE, *erit* (e) *ang.* LPM = *ang.* A. *Et ſimiliter oſtendetur eſſe ang.* MPN = *ang.* B, & *ang.* NPL = *ang.* C. *Factum eſt igitur quod petebatur.*]

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 31.

P*Lana parallelepipedum continentia* (1.) *ſunt parallelogramma,* (2.) *quæ ex adverſo ſunt ſimilia,* & (3.) *æqualia.*

[f] Per 16. l. 11. (g) Per eamd.

1. Pars. Planum AF ſecans plana BD, FH ex defin. 13. parallela, facit (*f*) ſectiones BA, FE parallelas. Rurſum planum AF ſecans plana AH, BG per defin. 13. parallela, facit (*g*) ſectiones AE, BF parallelas. Ergo BAEF parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

(h) Per 10. l. 11. (i) Per 27. & 14. l. 1. [K) Per 34. l. 1. [l) Per ſchol. p. 7. l. 5. & def. 1. l. 6.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet AB, BC parallelas eſſe EF, FG, erunt (*h*) anguli ABC, EFG pares. [*Ergo parallelogramma* BD, FH *ſunt* (i) *æquiangula.*] Quare cum & latera alternis ſunt (k) paria, [*hoc eſt,* AB = EF, BC = FG, CD = GH, & DA = HE;] ſimilia (*l*) ſunt parallelogramma adverſa BD, FH. Eodem modo probatur de ceteris oppoſitis.

(m) Per 34. l. 1. [n) Per 10. l. 11. (o) Per 4. l. 1. (p) Per 34. l. 1.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

[*Junge* AC, EG; & *cum in triangulis* ABC, EFG, *latera* AB, BC *lateribus* EF, FG *reſpective* (m) *æqualia ſint,* & *angulus* ABC *ſit angulo* EFG (n) *æqualis;* (o) *erit baſis* AC *baſi* EG *æqualis,* & *triangulum* ABC *triangulo* EFG *æquale. Cum vero parallelogramma oppoſita* BD, FH (p) *ſint triangulorum illorum æqualium dupla, erunt etiam iſta æqualia. Et eodem modo probabitur duo quævis alia oppoſita parallelogramma æqualia eſſe.*]

Fig. 32.

Cor. [1. *Parallelepipedum* (AB,) *aut quodvis*] priſma ſectum plano (CD) adverſis planis (AS, RB) parallelo, ſectionem habet ſimilem & æqualem planis adverſis. [*Demonſtrabitur eodem modo quo pars ſecunda ac tertia hujus prop.*

(q) Patet ex parte 1. hujus prop. (r) Per 1. l. 6. & def. 7. l. 5.

Cor. 2. *Eadem ſectione parallelogramma lateralia* (AF, SF, &c.) *dividentur in partes* [q) *parallelogrammas* (AN & CF, SN & DE, &c.) (r) *ſimiles partibus* (SD, DB) *in quas recta quævis lateralis* (SB) *eadem ſectione dividitur.*

Cor.

[Cor. 3. *Et præterea, ſi ſolidum plano adverſis planis parallelo ſectum, fuerit parallelepipedum; partes parallelogrammæ ſibi invicem oppoſitæ, in quas dividuntur adverſa plana lateralia, erunt* (a) *ſimiles & æquales.*]

(a) *Patet ex par. 2. & 3. hujus prop.*

PROPOSITIO XXV.

SI *parallelepipedum* (*AB*,) *aut quodvis priſma, plano* (*CD*) *ſecetur adverſis planis parallelo; erit ut baſis* (*ED*) *ad baſim* (*DF*,) *ita ſolidum* (*AD*) *ad ſolidum* (*CB*.) *Fig. 32.*

Demonſtrabitur eodem modo quo 1. 6.

[*Dividatur recta* DB *in æquales quotcumque partes, v. gr. quatuor*, DG, GH, HI, IB; *& in baſi* DF, *per diviſionum puncta* G, H, I, *ducantur rectæ* GK, HL, IM, *baſeos* DF *lateribus oppoſitis* DN, BF *parallelæ, & baſis in quatuor* (b) *ſimilia &* (c) *æqualia parallelogramma dividetur, nempe* DK, GL, HM, IF; *per quorum latera* GK, HL, IM, *tranſeant plana* GO, HP, IQ, *ſolidi* CB *adverſis planis* CD, RB *parallela, & dividetur illud in quatuor ſolida* DO, GP, HQ, IR, *ſingula* (d) *ſimilibus & æqualibus numero & magnitudine planis comprehenſa, ac proinde* (e) *æqualia. Quare planum* DK *& ſolidum* DO *ſunt conſequentium* DF *&* CB *ſimiles* (f) *partes aliquotæ. Auferatur jam recta* DG *ex* DS *quoties poterit, puta bis, & relinquetur* ST, *ipſa* DG *minor; & a diviſionum punctis* V, T *ducantur rectæ, baſeos* ED *lateribus oppoſitis* ES, ND *parallelæ, & per illas ducantur plana, adverſis ſolidi* AD *planis* AS, CD *parallela. Quoniam ſingulæ* DV, VT *ipſi* DG *æquales ſunt; erunt* (g) *etiam parallelogramma ſingula* NV, VX *parallelogrammo* DK *ſimilia & æqualia, & ſingula ſolida* CV, VI *ſolido* DO (*utpote quæ* (h) *ſimilibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis cum illo continentur*) *etiam* (i) *æqualia. Sed propter rectam* ST *ipſa* DG *minorem, erit baſis* ET *baſi* DK *minor* (k) *& ſolidum* AT *ſolido* DO *minus;* (*ſi enim utraque illorum ſolidorum ſuper æqualibus planis* AS, CD, *intra invicem collocari ſupponantur, propter* ST *minorem quam* DG, *ſolidum* AT *parti ſolummodo ſolidi* DO *exæquabitur.*) *Quoties igitur planum* DK *continetur in antecedente* DE, *toties etiam ſolidum* DO *in antecedente* DA *continebitur. Et eodem modo oſtendi poteſt, quaſcumque conſequentium* (*baſeos* DF, *& ſolidi* CB) *ſimiles partes aliquotas, in antecedentibus* (*baſi* ED, *& ſolido* AD) *æquali numero contineri.* (l) *Ergo baſis* ED *erit ad baſim* DF, *ut ſolidum* AD *eſt ad ſolidum* CB. *Q. E. D.*

(b) *Per 27. l. 1. & ſch. p. 7. l. 5. cum def. 1. l. 6.*
(c) *Per 36. l. 1.*
(d) *Per 24. l. 11. cum corollariis.*
(e) *Per def. 15 l. 11.*
(f) *Per def. 7. l. 5.*
(g) *Vide notas (b, c,) ſupra.*
(h) *Per præc. cum corollariis.*
(i) *Per def. 15. l. 11.*
(k) *Per 1. l. 6.*]
(l) *Per rationum æqualium indicium apud deff. l. 5.*

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 33. AD datam rectam lineam (AB,) & ad datum in ipſo punctum (A,) conſtituere angulum ſolidum (AHIL,) æqualem ſolido angulo dato (CDEF.)

Nota, literarum quæ deſignant angulum ſolidum, primam eſſe ad punctum in quo eſt angulus. Si angulus ſolidus AHIL eſt ad punctum A, & CDEF ad punctum C.

A puncto quovis F in recta CF, demitte (a) FC plano DCE rectam, ducanturque rectæ DF, FE, EG, GD, GC. Fac AH ═ CD, & ang. HAI ═ ang. DCE, & AI ═ CE; atque in plano HAI, fac ang. HAK ═ ang. DCG, & AK ═ CG. Tum erige (b) KL rectam plano HAI, & ſit KL ═ GF, ducanturque AL. Erit angulus ſolidus AHIL par dato CDEF. Nam junctis HK, IK, HL, IL, propter HA, AK ipſis DC, CG reſpective æquales, & ang. HAK ═ ang. DCG, erit (c) HK ═ DG. Et eodem modo, conferendo triangula IAK, ECG, oſtendetur (d) KI ═ GE; & in triang. HKL, DGF, (e) HL ═ DF; & in triang. IKL, EGF, IL ═ EF; & in triang. AKL, CGF, AL ═ CF. Triangula igitur AHL, CDF ſunt ſibi mutuo æquilatera, & proinde (f) æquiangula. Unde ang. HAL ═ ang. DCF. Et ob eamdem cauſam in triangulis ſibi mutuo æquilateris AIL, CEF, eſt ang. LAI ═ ang. FCE. Sed & ang. HAI ═ ang. DCE per conſtr. Factum eſt igitur quod petebatur.

(a) Per 11. l. 11.
(b) Per 12. l. 11.
(c) Per 4. l. 1.
(d) Per ax. 3. & p. 4. l. 1.
(e) Per def. 3. l. 11. & p. 4. l. 1.
(f) Per 8. l. 1.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 34. AData recta linea (AB,) dato ſolido parallelepipedo (CD) ſimile & ſimiliter poſitum parallelepipedum (AK) deſcribere.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æquales ſint ipſis FCE, ECG, FCG, fac (g) angulum ſolidum A angulo ſolido C parem. Item, ſit (h) FC : CE :: BA : AH, & CE : CG :: AH : AI, (& erit ex æquo (i) FC : CG :: BA : AI;) & perficiatur parallelepipedum AK. Erit hoc ſimile dato.

Nam per conſtr. parallelogramma BH, FE; & HI, EG; & BI, FG ſimilia ſunt; & horum ideo oppoſita (k) illorum oppoſitis. Ergo ſex plana ſolidi AK ſimilia ſunt ſex planis ſolidi CD; ac proinde (l) AK, CD ſunt ſolida ſimilia.]

(g) Per præc.
(h) Per 12. l. 6.
(i) Per 22. l. 5.
(k) Per 24. l. 11.
(l) Per def. 9. l. 11.

PRO

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum per adverſorum planorum diametros (AC, EG) tranſiens, parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata. Fig 31.

Quoniam (a) BG, BE ſunt parallelogramma; CG, AE æquidiſtant [*hoc eſt parallela ſunt*] eidem BF. Ergo & (b) inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in uno ſunt plano. Ergo rectæ AC, EG (c) in uno ſunt plano. Jam vero planum per illas ductum ſecare parallelepipedum in duo priſmata æqualia ſic oſtendo. (a) Per 4.l.11. (b) Per 9.l.11. (c) Per 7.l.11.

Intelligatur priſma AEGCDH ſupra planum ſuum EACG ita conſtitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore inter parallela plana BADC, FEHG. Tum vero neceſſe eſt ut D cadat in B, H in F. Cadat enim D extra B ſi fieri poteſt, in N. Angulus BAC æquatur (d) angulo DCA. Sed DCA æquatur NAC, (eſt enim unus idemque angulus.) Ergo BAC & NAC æquales ſunt: quod eſt abſurdum. Ergo D incidit in B; & pari de cauſa H in F. Ergo priſma AEGCDH congruit priſmati ACGEFB, ac proinde (e) æqualia ſunt. (d) Per 47.l.1. (e) Per axio. 7.

[*Tacqueti demonſtratio parallelepipedis quidem rectis convenit, quorum ſcil. plana lateralia ſunt baſibus recta; & forte etiam ad unius aut alterius ſpeciei obliqua accommodari poteſt. Cum vero in propp. ſeqq. hujus & proximi libri, ſupponatur hæc demonſtratio parallelepipeda quomodocumque obliqua extendere; ad accuratius Euclidis ipſius ratiocinium hic neceſſario recurrendum eſt, quo oſtenditur omnia omnino parallelepipeda quæ ſecantur a plano AG, per adverſorum planorum diametros parallelas AC, EG tranſeunte, in duo æqualia (addo, & ſimilia) priſmata ſecari.*

Eſt enim triangulum ABC triangulo ADC (f) *æquale, & (ob angulos æquales B* (g) *& D, BAC* (h) *& DCA, BCA & DAC) etiam* (i) *ſimile; & ob eamdem cauſam triangula EFG, EHG ſunt æqualia & ſimilia. Æqualia etiam & ſimilia ſunt* (k) *parallelogramma ſibi invicem oppoſita AF & CH, itemque BG & AH; atque eſt AG utrique priſmati commune. Priſmata igitur ABCGEF, ADCGEH, continentur a ſimilibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis, & proinde ſunt* (l) *ſimilia & æqualia. Q. E. D.*] (f) Per 34.l.1. (g) Per eand. (h) Per 27.l.1. (i) Per 4.l.6. (k) Per 24.l.11. (l) Per def. 15.l.11.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Fig. 35 & 36. *PArallelepipeda (FEAGKIMC & FEBHLOMI) quæ eamdem habent baſim (EFIM) & altitudinem eamdem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (EFIM, GAOL,) æqualia ſunt .*

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana EAOM, & FGLI , vel non . Eſto primum . Ex. 24. hujus , & 8.
Fig. 35. l. 1. patet triangula AEB , CMO , item GFH , KIL ſibi mutuo æquilatera & æquiangula eſſe . Quare ut in præcedenti , oſtendam priſmata CMOLIK, AEBHFG ſibi mu-
(a) Per tuo impoſita congruere , ac proinde (a) æqualia eſſe . Qua-
axio. 7. re addito communi ſolido FEBHKCMI, tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt . Quod erat demonſtrandum.

[Aliter . *In parallelogrammis AEMC, BEMO, latera op-*
(b) Per *poſita ſunt* (b) *æqualia, hoc eſt , AE = CM, BE = OM , AC*
34 l. 1. *= EM = BO ; & ablata communi recta BC , AB = CO .*
Ergo triangula ABE , COM ſunt ſibi mutuo æquilatera , &
(c) Per *proinde* (c) *æqualia , & eodem modo oſtendetur triangula*
8. l. 1. *FGH, IKL æqualia eſſe: Oppoſita autem parallelepipedorum*
(d) Per *plana ſunt* (d) *æqualia, nempe AF = CI, & BF = OI; & AK*
24. l. 11. *= EI = BL; unde ablato communi BK, erit AH = CL. Quare priſmata AEBHFG, CMOLIK a ſimilibus planis numero & magnitudine æqualibus continentur, & proinde* (e) *æqualia*
(e) Per def. *ſunt . Commune apponatur ſolidum cujus baſis eſt FM & pla-*
15. l. 11. *num oppoſitum BK , & tota parallelepipeda FEAGKIMC , FEBHLOMI æqualia erunt . Q. E. D.*]

Fig. 36. Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR non inter eadem lateralia plana parallela exiſtens cum parallelepipedo FEAGKCMI . Quoniam ex hypotheſi GK , AC, RP , QX ſunt in uno plano ad baſim EFIM parallelo ; RP , QX ſecent GK in L & H , AC vero in O & B ; junganturque EB, MO, FH, IL . Facile oſtenſu eſt plana ſolidum FEBHLOMI continentia, parallelogramma eſſe ex adverſo æquidiſtantia. [*Nam adverſa plana quadrilatera ſolidi iſtius ſunt in iiſdem planis cum oppoſitis parallelepipedorum*
(f) Per *AFIC, QFIR planis , & proinde* (f) *parallela ſunt . Solidi*
24 l. 11. *enim BFIO quadrilatera oppoſita BEMO, HFIL ſunt reſpective in iiſdem planis cum oppoſitis ACME, GKIF planis parallelepipedi AFIC; & ejuſdem ſolidi B IO quadrilatera oppoſita BEFH , MOLI ſunt in iiſdem planis reſpective cum oppoſitis*

oppoſitis planis QEFX, MIPR parallelepipedi QFIR: eſt vero parallelogrammum EI, ſolido cum parallelepipedis commune, & quadrilaterum BOLH eſt in plano ipſi EI parallelo per hypotheſin. Patet igitur ſolidum BFIO comprehendi a planis quadrilateris ex adverſo parallelis,] adeoque ſolidum illud (*a*) eſſe parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI, ſunt æqualia. Ergo etiam ſunt æqualia inter ſe. Quod erat dem. (a) Per def. 13. l. 11.

Scholium.

HÆc propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. Quare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum demonſtratio.

PROPOSITIO XXXI.

P*Arallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (AO & EG) & in eadem altitudine (S) ſunt æqualia.* Fig. 37.

Habeant parallelepipeda primo latera ad baſes normalia. Ad latus FG productum, fiat parallelogrammum GMKH æquale ac ſimile parallelogrammo AO: perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipſi KH in Q & L. Jam vero intelligantur ſuper GK, GQ, GP conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium communis ſit S. Solidum EGS eſt ad ſolidum GPS, ut EG (*b*) ad GP; hoc eſt, (quia EG, AO per hyp. æquantur,) ut AO ad GP; hoc eſt, per conſtr. ut GK ad GP; hoc eſt, ut (*c*) GQ ad GP; hoc eſt, (*d*) ut ſolidum GQS eſt ad idem ſolidum GPS. Quoniam igitur ſolida EGS & GQS eumdem habent rationem ad ſolidum GPS, erit ſolidum EGS (*e*) æquale GQS; hoc eſt, ſolido (*f*) GKS, hoc eſt, (quia baſes GK, AO ſunt (g) æquales & ſimiles,) ſolido (*h*) AOS. Quod erat propoſitum. Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta. (b) Per 25. l. 11. (c) Per 35. l. 1. (d) Per 25. l. 11. (e) Per 9. l. 5. (f) Per 29. l. 11. (g) Per conſtr.

Habeant deinde parallelepipeda data EGS, AOS latera ad baſes EG & AO obliqua. Fiant ſuper EG, AO parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S. Hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum. (h) Per def. 15. l. 11.

P PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 38.

P*Arallelepipeda quævis æque alta, ſunt inter ſe ut baſes.*

Baſes ſint GO & A, [*& altitudo communis ſit K.*] Super GO fac (*a*) parallelogrammum OE par ipſi A, [*in angulo OCE æquali dato G.*]

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK. Ergo (*b*) parallelepipedum OEK eſt ad parallelepipedum BCK, ut baſis OE ad baſim BC; hoc (*c*) eſt, ut baſis A ad baſim BC. Sed quia baſes O' & A ſunt æquales, parallelepipeda OFK & AK (*d*) æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum AK eſt ad parallelepipedum BCK, ut baſis A ad baſim BC. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 44. *l.* 1.
(b) *Per* 25. *l.* 1.
(c) *Per conſtruct.*
(d) *Per præc.*

Scholium.

QUod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuslibet priſmatibus in corollario 1. poſt prop. 9. de conis & cylindris prop. 11.

ROPOSITIO XXXIII.

Fig. 39.

S*Imilia parallelepipeda (HA & CM) ſunt in triplicata ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH, CM ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia (*e*) ſunt; adeoque AB ad BC (*f*) eſt ut EB ad BO; & ut FB ad BG, ſic EB ad BO. Inſuper & anguli (*g*) planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida AH, CM, ut æquales anguli CBO, ABE ſint oppoſiti [*in eodem plano*] & latera AB, CB in directum; tum vero etiam (*h*) EB, OB [*itemque FB, BG.*] in directum erunt. Cogitentur jam ſuper planis EC & CO facta ſolida, ſic ut ſolida KB, HA ſint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum ſimiliter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA eſt ad ſolidum KB (*i*) ut AB ad EC; hoc eſt, ut (k) AB ad BC; hoc eſt, (ut per hyp. oſtendi ſupra,) ut EB ad BO; hoc (*l*) eſt, ut
EC

(e) Per def. 9. *l.* 11.
[f] *Per def.* 1. *l.* 6.
[g] *Per eamd.*
[h] *Patet ex* 13. *&* 14. *l.* 1.
[i] *Per* 25. *l.* 11.
[K] Per 1. *l.* 6.
(l) *Per eamd.*

Digitized by Google

EC ad CO; hoc eſt, ut ſolidum (*a*) idem KB ad ſolidum (a) Per 25. l. 11.
PO. Continuant ergo eamdem rationem tria ſolida HA,
KB, PO. Jam vero ſolidum KB eſt ad ſolidum PO, ut
baſis EC ad baſim CO; hoc eſt, ut EB ad BO; hoc eſt, ut (b) Oſtenſ. ſupra ex hyp.
(*b*) FB ad BG; hoc eſt, ut planum FC ad planum CG; hoc
eſt, ut idem rurſus ſolidum PO ad CM ſolidum. Quatuor
ergo ſolida HA, KB, PO, CM, ſunt continue proportio- (c) Per def. 10. l. 5.
nalia. Ergo ratio primi HA ad quartum CM eſt (*c*) tripli- (d) Per 25 l. 11.
cata rationis primi HA ad KB ſecundum; hoc eſt, rationis
(*d*) AE ad EC; hoc eſt, (*e*) rationis homologorum laterum (e) Per 1. l. 6.
AB ad BC. Quod erat demonſtrandum. Fig. 37. & 40.

[Aliter. *Similium parallelepipedorum HA, QS, ſint latera homologa AB & RS, EB & TS, FB & VS. Dico ſolidum HA eſſe ad ſolidum QS in triplicata ratione AB ad RS.*

Producantur AB, EB, FB ad C, O, G, ut ſint BC, BO, BG rectis RS, TS, VS reſpective æquales; & compleatur parallelogrammum CO & parallelepipedum CM. Et propter ang.
OBC = (f) *ang.* ABE = (g) *ang.* RST, *& latera* BC, OB (f) Per 15. l. 1.
lateribus RS, TS *reſpective* (h) *æqualia, parallelogramma* (g) Per hyp. & def. 1. l. 6.
OC, RT *erunt ſimilia &* (i) *æqualia. Eodem modo ſimilia
& æqualia erunt parallelogramma CG, RV; atque etiam OG,
TV: unde & bin oppoſita parallelogramma, (nempe bina quælibet, planis ſimilibus & æqualibus oppoſita in utroque ſolido)* (h) Per conſtr.
(k) *ſimilia & æqualia erunt. Sunt* (l) *igitur ſolida QS, CM* (i) Per axio. 7.
ſimilia & æqualia; ac proinde (m) *ſolida HA, CM ſimilia* [K] Per 24. l. 11.
erunt, & AB : BC :: EB : BO :: FB : BG. Super baſibus [l] Per def. 15. l. 11.
EC, CO perficiantur parallelepipeda BK, PO ejuſdem altitudinis cum AH. Erit itaque AB : BC vel (n) *RS :: EB :* [m] Per hyp. & def. 9. l. 11.
BO vel ST :: FB : BG vel SV; hoc eſt, (o) *AE : EC :: EC :*
CO :: FC : CG; hoc eſt, (p) *AH : BK :: BK : PO :: PO :* [n] Per conſtr.
CM vel QS. Ergo (q) *AH eſt ad QS in triplicata ratione*
AH ad BK. Sed AH : BK :: (r) *AE : EC ::* (ſ) *AB : BC vel* [o] Per 1. l. 6.
RS. Ergo (t) *ſolidum AH eſt ad ſimile ſolidum QS in triplicata ratione lateris AB ad ſibi homologum latus RS. Q.E.D.* [p] Per 25. l. 11.

Cor. 1. *Hinc ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales; ut eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper prima deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecunda; & proinde datis parallelepipedorum ſimilium HA, CM, lateribus homologis AB, BC, invenietur illorum ad invicem proportio, faciendo AB, BC; X, Y* ∺. *Erit enim HA : CM :: AB : Y. Quare etiam, datis ſolidis HA, CM, & ipſius HA latere quovis AB; alterius ſolidi latus homologum BC erit duorum mediorum* (u) *proportionalium prius inter AB & Y.*] [q] Per def. 10 l. 5. (r) Per 25. l. 11. (ſ) Per 1. l. 6. (t) Per 11. l. 5. (u) Vide p. 13. l. 6.

Cor. 2. *Hinc corrigendus eſt eorum error, qui ſolido-*

rum ſimilium eamdem ac laterum eſſe rationem opinantur. Lineæ enim duplæ cubus non eſt tantum duplus, ſed octuplus cubi alterius. Et lineæ triplæ cubus non eſt tantum triplus, ſed vigecuplus ſeptuplus cubi alterius. Nam 1, 2, 4, 8 ∺ & 1, 3, 9, 27 ∺. *Et ita de corporibus quibuſcumque ſimilibus eſt cenſendum; ut deinceps patebit.*

Cor. 3. *Hinc quoque pendet celeberrimum illud de cubo duplicando Problema: de quo infra, ad calcem lib.* 12. *Ubi etiam oſtendetur, qua methodo cubi, vel corpora quævis ſimilia, in data ratione augeri vel diminui poſſunt.*

[Scholium. 1. *Cum cubi ſint ſimilia ſolida parallelepipeda, & proinde ſint in triplicata ratione laterum ſuorum; inde fit ut ratio triplicata quantitatum quarumvis, per rationem cuborum earumdem quantitatum ſæpiſſime deſignari ſolet. Sic ex. gr. ratio triplicata rationis* A *ad* B, *ſæpe denominatur ratio* Acub. *ad* Bcub. *vel* Ac *ad* Bc.]

Scholium. 2.

Quod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. demonſtrabitur de pyramidibus propoſ. 8. de quibuslibet priſmatibus coroll. 2. poſt p. 9. de conis & cylindris p. 12. de ſphæris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 40.

Si *parallelepipeda* (*QS*, *CK*) *æqualia ſunt; reciprocant baſes & altitudines, (hoc eſt, baſis* RT *eſt ad baſim FK, ut reciproce altitudo FC ad altitudinem SV.*)

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

1. Pars. Sint primo latera ad baſes recta. Si jam ſolidorum QS, CK altitudines ſint pares, res patet.

(a) *Per* 32 *l.* 11.
(b) *Per hyp.*

[*Nam propter æquales altitudines*, (a) *erunt parallelepipeda ut baſes: atqui iſta* (b) *ſunt æqualia; ergo & baſes erunt æquales, & proinde eadem eſt ratio æqualitatis inter altitudinem parallelepipedi prioris & altitudinem poſterioris, ac inter baſim poſterioris & baſim prioris.*

(c) *Per* 32. *l.* 11.
(d) *Per* 25. *l.* 11.
(e) *Per* 1. *l.* 6.

Si altitudines ſint inæquales, a majori FC, abſcinde FE parem SV: & per E duc planum EL ad FK parallelum. Baſis RT eſt ad baſim FK, ut ſolidum (c) QS ad ſolidum EK; hoc eſt, (quod ex hyp. paria ſint ſolida QS, CK,) ut ſolidum CK ad EK ſolidum; hoc eſt, ut (d) CG ad EG; hoc eſt, ut (e) CF ad EF; hoc eſt, ex conſtr. ut CF reciproce ad VS. Quod erat demonſt.

Sint

Sint deinde latera ad baſes obliqua. Erigantur ſuper iiſdem baſibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua (*a*) parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent baſes & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per 30. l. 11.*

2. Pars. [*Sint latera ad baſes recta, & altitudines æquales. Cum igitur baſes & altitudines jam ponantur reciprocæ; ob harum æqualitatem, æquabuntur & illæ; ac* (b) *proinde ipſa etiam parallelepipeda.* (b) *Per 31. l. 11.*

Deinde,] ſint altitudines inæquales, lateraque ad baſes recta; & ex majori CF, ipſi VS ſume parem EF. Solidum QS eſt ad ſolidum EK, ut (*c*) RT ad FK; hoc eſt, ex hyp. ut CF ad VS; hoc eſt, ex conſtr. ut CF ad EF; hoc eſt, ut (*d*) CG ad EG; hoc eſt, ut ſolidum (*e*) GK ad ſolidum idem EK. Ergo ſolida QS & CK eamdem habent rationem ad EK. Ergo ſunt paria. Quod erat demonſtrandum. (c) *Per 32. l. 11.* (d) *Per 1. l. 6.* (e) *Per 25. l. 11.*

[*Et cum parallelepipeda obliqua ſint rectis æque alta & ſuper iiſdem baſibus* (f) *æqualia; illa etiam, ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.*] (f) *Per 30. l. 11.*

Corollaria.

QUÆ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29, 30, 31, 32, 33, 34. etiã conveniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur,

1. Priſmata triangularia æque alta ſunt ut baſes A, B. *Fig. 41.* [*Et proinde, ſi eamdem vel æquales habeant baſes, & eamdem altitudinem, æqualia ſunt.*]

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum. [*Et proinde corollaria prop.* 33. *ad illa applicari poſſunt.*]

3. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes & altitudines: & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

QUod hic propoſ. 34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9. de priſmatis quibuſcumque coroll. 3. poſt p. 9. de conis & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

V*Alde prolixa, ſervit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.*

PROPOSITIO XXXVI.

11. 12. **P***Arallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A , B , C) factum , æquatur parallelepipedo (IN) facto a media (B). & æquiangulo priori.*

Parallelepipedi DH baſis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C: latus vero EG baſi inſiſtens, æquale mediæ B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A , B , C. Parallelepipedi deinde IN tria latera LX , IX , XM (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B; & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum IN factum ex media B , & priori æquiangulum. Dico etiam eſſe æquale.

(a) Per 14. l. 6. (b) Per def. 11. l. 11. (c) Per 31. l. 11. Cum enim per hyp. & conſtr. ſit ut FE ad LX ; ita reciproce IX ad DE, erunt (*a*) baſes DF, IL æquales. Jam quia anguli ſolidi ad E & X ſunt æquales ; ſi ponantur intra invicem , (*b*) congruent ; & ob æqualitatem rectarum EG , XM , puncta M , G coincident. Quare una erit utriuſque ſolidi altitudo perpendicularis , nempe a punctis M, G jam congruentibus , in planum baſeos demiſſa . Solida (*c*) igitur DH , IN æqualia ſunt . Quod erat demonſtrandum .

Scholium .

(d) Vide ſch. 1. p. 40. l. 11. **H**IC porro obſervabimus, id quod magnum habet uſum, ex tribus lineis quomodocumque inter ſe (*d*) ductis , ejuſdem magnitudinis ſolidum [*parallelepipedum rectum , ſeu planis rectangulis comprehenſum* gigni .

ABC. CAB. BCA.

1 2 3

In ſchemate hic appoſito , duæ primæ litteræ deſignant baſim ; tertia altitudinem . Comparemus primum cum ſecundo .

Baſis AB eſt ad baſim CA per 1. 6. ut B latus ad C latus : hoc eſt , reciproce ut B altitudo ad C altitudinem . Ergo per p. 34.

ABC. Æ. CAB.

Eodem modo oſtendes primum tertio , & tertium ſecundo eſſe æqualia .

PROPOSITIO XXXVII.

P*Arallelepipeda ſimilia , ſimiliterque a lineis proportionalibus deſcripta , etiam ipſa ſunt proportionalia : & & e converſo .*

Patet

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum, per 33. hujus, erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Converſa patet ex. 35. l. 5. [*Rationes enim parallelepipedorum ex hypotheſi æquales*, (a) *triplicatæ ſunt rationum homologorum laterum*, *a quibus parallelepipeda ſimilia ſimiliter deſcribuntur*: & *proinde horum laterum rationes* (b) *erunt æquales*.] (a) Per 33. l. 11. (b) Per 35. l. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcumque ſimilibus corporibus, quæ patebit l.12. triplicatam habere laterum rationem.

[Corol. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices cubicas. Si nempe multiplicentur inter ſe quantitates quæ ſub radicis cubicæ ſignis ſunt, & producto præfigatur ejuſdem radicis cubicæ ſignum; habebitur datarum radicum cubicarum productum. Exempli gr. ſit* $\sqrt{}$ c5 *multiplicanda in* $\sqrt{}$ c4: *producetur* $\sqrt{}$ c20. *Nam ex multiplicationis definitione, debet eſſe unitas ad multiplicantem* (*ſive* $\sqrt{}$ c4.) *ut eſt multiplicandus* (*ſeu* $\sqrt{}$ c5) *ad productum. Ergo per hanc prop. erit cubus unitatis ad cubum multiplicantis, ut cubus multiplicandi eſt ad cubum producti: hoc eſt, ſi pro numero producto ponatur P, erit* 1.4:: 5. *P*c. *Sed* 1.4:: 5. 20. *Ergo P*c = 20, & P = $\sqrt{}$ c20.

Et ſimiliter, ex diviſionis definitione oſtendetur, quod $\sqrt{}$ c20 *diviſa* $\sqrt{}$ c5 *exhibebit quotum* = $\sqrt{}$ c4. *Vide cor.1.p.22.l.6.*

Et univerſaliter, quantitatum radicalium ejuſdem cujuſvis ordinis ſive ſpeciei, facta (*vel quoti*) *habentur, multiplicando* (*vel dividendo*) *quantitates quæ ſub ſignis radicalibus ſunt*, & *producto* (*vel quoto*) *idem ſignum radicale præfigendo*.

Propoſitionem 38. *jam ſupra demonſtravimus, in ſchol. p.*13. *hujus l.* 11 *Sequitur*.

PROPOSITIO XXXIX.

SI ſolidi parallelepipedi (AB,) eorum quæ ex adverſo planorum (AC, DB) latera, nempe AE, FC, AF, EC; & DH, GB, DG, HB bifariam ſecta ſint: per ſectiones autem plana (ILQO, PKMR) ſint extenſa; planorum communis ſectio (ST,) & ſolidi parallelepipedi diameter (AB,) biſariam ſe mutuo ſecabunt. Fig. 43.

Ducantur recta SA, SC, TD, TB. Et propter biſectas DG, HB, DH, GB, ac rectam RP ipſis DG, HB, rectamque OQ

ipſis DH, GB (a) *parallelam; dividetur parallelogrammum* GH *in quatuor æqualia parallelogramma, toti & ſibi invicem* (b) *ſimilia & ſimiliter poſita. Quare* OR, PQ *ſibi mutuo impoſita congruent, &* DT = (c) TB. *Parallelogramma etiam* OR, PQ, *angulos* ODR, PBQ *cum ſimili ſibi ipſis parallelogrammo* GH *communes habentia, circa eamdem diametrum* (d) *exiſtunt, & proinde* DTB *eſt* (e) *linea recta. Eodem modo* ASC *recta linea eſt, &* AS = SC. *Porro,* AD *parallela & æqualis eſt* (f) *ipſi* FG, *atque* FG *parallela & æqualis eſt ipſi* CB: *ergo* (g) AD, CB *ſunt parallelæ & æquales; unde &* AC, DB, *quæ eas jungunt, ſunt* (h) *parallelæ & æquales, ac proinde earum dimidia* AS, BT *æquales erunt; & præterea* AB, ST *ſunt in* (i) *eodem plano* ACBD. *In triangulis itaque* ASV, BTV, *propter angulos* AVS, BVT *ad verticem oppoſitos, & proinde* (k) *æquales, & angulos alternos* ASV, BTV; *& proinde* (l) *æquales; & latera* AS. BT *æqualia; omnia reliqua erunt* (m) *æqualia, &* SV = VT, *&* AV = VB. *Ergo communis ſectio* ST *& diameter* AB *ſe mutuo bifariam ſecant.* Q.E.D.

Corol. *Hinc in omni parallelepipedo, diametri omnes ſe mutuo bifariam ſecabunt in uno eodemque puncto* V.]

(a) Per 33. l. 1.
(b) Per 27. & 34. l. 1. cum def. 1. l. 6.
(c) Per axio. 7. l. 1.
(d) Per 26. l. 6.
(e) Per def. 37. l. 1.
[f] Per 24. l. 11 & 34. l. 1.
(g) Per 9. l. 11. & axio. 1.
(h) Per 33. l. 1.
(i) Per cor. p. 7. l. 11.
(k) Per 15. l. 1.
(l) Per 29. l. 1.
[m] Per 46. l. 1.

PROPOSITIO XL.

Fig. 44. & 45.

SI fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC & IKLPXQ,) quorum unum baſim habeat parallelogrammam (OB) duplam baſeos alterius (IKL) quæ triangula ſit; priſmata erunt æqualia.

Nam ſi perficiantur parallelepipeda KR & CH, erunt hæc (*n*) æqualia, ob baſium CA, MK, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum (*o*) dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

[*Sunt nempe hæc duo priſmata triangularia, æqualium parallelepipedorum per diagonales ſectorum dimidia. Hoc tantum intereſt, quod in poſteriore ſectio fit per baſeos diagonalem, in priore non item.*]

[n] Per 31. l. 11.
(o) Per 28. l. 11.

Scholium 1.

EX hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & [*ejuſmodi*] quadrangularium [*quorum adverſa plana quadriangularia quæcumque ſunt parallela,*] ſeu parallelepipedorum, ſi nimirum altitudo ducatur in baſim. Ut ſi altitudo ſit 10. pedum, baſis vero pedum qua-

quadratorum 100.(menſurabitur autem baſis per ſchol.p.36. vel 41. l. 1.) multiplica 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.

Demonſtratio facilis eſt. Namquemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ducta, cum per 31. æquale ſit parallelepipedo recto ſuper eadem baſi ad eamdem altitudinem conſtituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producitur ex altitudine in totam baſim; ſemiſſis parallelepipedi, (hoc eſt, priſma triangulare, per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam baſim, triangulum nempe ILK. Fig. 47.

[Scholium 2. *Cum priſmata polygona in triangularia reſolvi poſſint, vel etiam ad triangularia æqualis baſeos & altitudinis* (a) *reduci; quæ igitur de priſmatis triangularibus traduntur in corollariis p. 34. & in ſchol. 1. pr. hujus 40. de quibuſcumque priſmatis polygonis vera ſunt. At cum Tacqueto viſum fuerit illa omnia ex iis quæ in lib. 12. de pyramidibus demonſtrantur, derivare; non opus eſt ut eadem hic aliunde deducendo, tyronibus moram injiceremus.*] (a) Per 25.l.6.

Digitized by Google

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER DUODECIMUS, NOBIS OCTAVUS.

QUOD in libris præcedentibus hactenus præſtare conati ſumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem methodum revocaremus; id in primis præſtandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cum maxime ſit neceſſaria, demonſtrationes adeo ſunt prolixæ, ut tyrones in deſperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt; ut tamen a rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod utrum ſimus aſſecuti, lector intelliget, ſi hæc noſtra cum Euclidea prolixitate contulerit.

POſtquam vero Euclides libro priore ſolidorum elementa expoſuiſſet, & corporum facillimorum, utpote ſuperficiebus planis terminatorum, menſuras definiviſſet; in Duodecimo *hoc libro corpora ſuperficiebus curvis terminata, Cylindros nimirum, Conos atque Sphæras conſiderat: ea inter ſe comparat: & eorum menſuras definit. Utiliſſimus ſane eſt hic liber; eo quod principia illa contineat quibus tot celeberrimas demonſtrationes de Cylindro, Cono atque Sphæra Geometrarum Principes, præſertim vero Archimedes, inædificarunt.*

DEFINITIONES.

1. PYramis eſt ſolidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehenſum, ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) conſtitutis. *Fig. 1. l. 12.*

Planum Z baſis dicitur, & eſſe poteſt vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura [*rectilinea;*] ex cujus lateribus ſingulis triangula ſurgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntia.

Ut

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis [*triangularis, quæ pro baſi triangulum habet,*] inter ſolidas prima & ſimpliciſſima eſt.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A,) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri cœperat; ſuperficies, a recta linea (ACF) deſcripta, dicitur conica ſuperficies: corpus vero quod hac ſuperficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur. *Fig. 2. & 3.*

Vertex coni eſt A.

Baſis coni eſt circulus CL.

Axis coni eſt recta (AB) ex vertice ad baſeos centrum ducta.

Latus coni eſt recta (AC) a vertice ad baſeos circumferentiam ducta, quam eſſe totam in coni ſuperficie, ex ejus geneſi eſt manifeſtum.

Conus rectus eſt, cum axis (AB) eſt baſi rectus. *Fig. 2.*

Conus ſcalenus, ſeu obliquus eſt, cum axis (AB) non eſt ad baſim rectus. *Fig. 3.*

Fit etiam conus rectus a triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. *Fig. 2.*

3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (CL, OQ,) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, ſic ut mota ſibi ipſi [*& rectæ BA circulorum centra jungenti*] ſemper parallela maneat; ſuperficies a recta (COF) deſcripta, dicitur cylindrica ſuperficies; corpus vero quod hac ſuperficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur. *Fig. 4. & 5.*

Baſes cylindri ſunt circuli (CL, OQ,)

Axis cylindri eſt recta (AB) baſium centra connectens.

Latus cylindri eſt recta (OC) in cylindri ſuperficie utramque baſim tangens.

Rectus cylindrus eſt, cum axis ad baſes rectus eſt. *Fig. 4.*

Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad baſes non eſt rectus. *Fig. 5.*

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto. *Fig. 4.*

4. Similes coni & cylindri ſunt, quorum axes (AK, ZO) & baſium diametri (BF, QR) ſunt proportionales; [*& quorum axes vel ſunt baſibus recti, vel iiſdem ſimiliter inclinati.*] *Fig. 14. & 15.*

5. Sphæra eſt ſolidum comprehenſum una ſuperficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipſam poſito ductæ, ſunt æquales.

Punctum

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum ducta ad ſuperficiem utrimque pertingens.

Fig. 6. Generatur ſphæra, ſi ſemicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſive figura minores vel majores, in figuram deſinere dicuntur, cum ab ea tandem differre poſſunt quantitate minori quacumque data, ſeu quantumvis parva.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab ea tandem deficiant defectu minori quocumque dato; inſcripta dicentur in figuram deſinere: Et ſi ea quæ alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocumque dato; dicentur rurſum circumſcripta deſinere in figuram.

Fig. 9. [7. *Si fiat triangulum BAC in ſemicirculo BDLC, & ſuper lateribus BA, AC pro diametris, ducantur ſemicirculi minores BNA, AMC; figuræ curvilineæ BDAN, ALCM, ſemiperipheria circuli minoris exterius, & arcu circuli majoris interius, ſingulæ terminatæ, ab earum inventore,* Lunulæ conjugatæ Hippocratis Chii *appellantur.*

Fig. 10. *Si arcus BDA, ALC ſint æquales, ac proinde quadrantes ſint peripheriæ majoris circuli, denominentur ejuſmodi lunulæ* quadrantales.

Fig. 11. *Si recta ED arcus lunulæ quadrantalis proportionaliter ſecet in E, D, ut ſit arcus BE ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA, vocentur areæ AED, BED* portiones lunulæ quadrantalis.

8. *Lunula, vel ejuſdem portio* quadrati *dicitur, ſi ei æquali figura rectilinea conſtrui poſſit.*]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7. P*Olygonorum ſimilium circulis inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum* (*AF, IC*;) [atque adeo etiam ſemidiametrorum (AZ, IX.)]

Ducantur AO, FB; IR, LC. Quia polygona ponun-

(a) *Per def. 1. l. 6.* tur ſimilia, æquales erunt (*a*) anguli OBA, RLI, & latera

(b) *Per 6. l. 6.* OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (*b*) anguli O & R æquantur. Ergo etiam

(c) *Per 21. l. 3.* BFA & LCI, qui iiſdem arcubus BA, LI inſiſtunt, ſunt (*c*) æquales. Anguli vero FBA, CLI in ſemicirculis ſunt

(a) re-

(*a*) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC (*b*) æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL ſibi mutuo æquiangula ſunt, erunt (*c*) ſimilia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata (*d*) proportionis laterum BA, LI; hoc eſt, ut jam oſtendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC, [*ac proinde* (e) *etiam ſemidiametrorum AZ, IX*.] Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per 31 l.3.*
(b) *Per cor. 9.p 32. l.1.*
(c) *Per 4. l.6.*
(d) *Per 20 l.6.*
(e) *Per 15. l.5.*

Corollaria.

1. POlygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe ut diametri. *Fig. 6. & 7.*

Cum oſtenſum jam ſit AB eſſe ad LI, ut AF ad IC; etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC: & ſic de ceteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera ad ſimul omnia, (hoc eſt ambitus ad ambitum) ſunt ut AF ad IC.

[2. *Figurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum, latera homologa ſunt inter ſe ut circulorum diametri.*]

Lemma.

POlygona circulo Inſcripta in circulum deſinunt.

Inſcribe quadratum ACBD. Cum hoc dimidium ſit quadrati (*f*) circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur e circulo, auferetur plus quam dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in E, K, I, H, inſcribe octogonum: & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G & F: erit CF (*g*) parallelogrammum, cujus cum dimidium ſit triangulum (*h*) CEA, erit hoc plus quam dimidium ſegmenti CEA. Eodem modo ſingula triangula AKD, DIB, &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium ſegmentorum plus quam dimidia ſunt. Hæc ergo [*triangula*] ſi ex illis [*ſegmentis*] hoc eſt, ex reſiduo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum, oſtendam e reſiduo circuli ſemper auferri plus quam dimidium. Ergo reſiduum erit tandem (*i*) minus quocumque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem a circulo deficient quantitate minori data quacumque; hoc eſt, in circulum (*k*) deſinent. Q. e d.

Fig. 8.
(f) *Per ſch. poſt 6. & 7. l. 4.*
(g) *Per cor. p.28. & 29. l.3.*
(h) *Per 41. l.1.*
(i) *Patet ex lem.2. ſch. poſt 11. l.6.*
[k] *Per deſin.6. l. 12.*

[*Haud abſimili methodo demonſtrari poſſet, polygona circulo circumſcripta in circulum deſinere. Verum cum hoc inter alia nec non & ipſum Lemma præcedens, in pro p.3. Theorematum ex Archimede ſelectorum contineantur, ſuperfluum eſſet hic loci plura ſubjungere.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. **C***Irculorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum.*

(a) *Per 1. l. 12.* (b) *Per lem.*

Polygonorum ſimilium circulis ſine fine inſcriptorum proportio ſemper duplicata (*a*) eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulis in infinitum inſcripta, in circulos (*b*) deſinunt. Ergo per poriſma univerſale ſequens, etiam circulorum proportio duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma univerſale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant; quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eamdem habent & figuræ.

R
A B X Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eamdem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur; ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant (*c*) minori quantitate, quam R deficiat a figura A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quam R. Ergo C eſt ad B in (*d*) majori, quam R ad B; hoc eſt, (ut ponebatur,) quam X ad Z; hoc eſt, per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quam ad F, erit B figura minor (*e*) ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur rationem B ad A non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X, [*hoc* (f) *eſt, rationem A ad B non eſſe minorem ratione* X *ad* Z.] Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

(c) *Per def. 6. l. 12.* (d) *Per 8. l. 5.* (e) *Per 10. l. 5.* (f) *Per 26, l. 5.*

[*Eadem methodo demonſtrabitur, duas figuras eamdem inter ſe proportionem habere, quam ſemper habent circumſcripta in illas deſinentia; hoc modo:*

G F.
A B X Z
R

Sit ratio X ad Z ea quam circumſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eamdem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea quæ figuris circumſcribuntur; ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo

Ergo erit A ad aliam quamdam quantitatem R, ipſa majorem, ut X ad Z. Et quoniam circumſcripta per hypotheſin deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B circumſcripta, quæ ipſas excedant quantitate (a) *minori quam R excedat figuram B. Sint ea C & F. Ergo F minor erit quam R. Ergo* (b) *ratio A ad F major eſt ratione A ad R; hoc eſt, ratione X ad Z, ſive C ad F. Quoniam igitur ratio A ad F major eſt ratione C ad F, figura A major* (c) *erit ſibi circumſcripto C, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur eſt ratio A ad B major ratione X ad Z. Eodem modo oſtendetur rationem B ad A non eſſe ratione Z ad X majorem, &* (d) *proinde rationem A ad B non minorem eſſe ratione X ad Z. Si itaque ratio A ad B neque major neque minor eſt ratione X ad Z; erit ei æqualis. Q. E. D.*

(a) Per def. 6. l. 12. [b] Per 8. l. 5. [c] Per 10. l. 5. (d) Per 26. l. 5.

Corollaria ad Prop. II.

Cor. 1. *Hinc, ut circulus eſt ad circulum, ita polygonum in illo deſcriptum erit ad ſimile polygonum in hoc deſcriptum. Utraque enim ſunt in duplicata ratione diametrorum quæ ſunt in circulis.* Fig. 6. & 7.

Cor. 2. *Hinc etiam liquet circulos eſſe ad ſe invicem, in ratione radiorum ſuorum* (e) *duplicata; hoc eſt, ut* (f) *quadrata radiorum,*

Cor. 3. *Hinc etiam, circulorum quorum diametri vel ſemidiametri ſunt notæ, proportio innoteſcit;* (g) *inveniendo nimirum diametris datis tertiam proportionalem, ad quam circuli primi diameter eamdem* (h) *habebit rationem, quam habet circulus iſte primus ad ſecundum. Sit circuli primi diameter pedum quatuor, ſecundi pedum ſex; cum ſint 4, 6, 9. continue* (i) *proportionales, erit circulus primus ad ſecundum ut 4. ad 9.*

Cor. 4. *Hinc etiam, circulum quemvis in data ratione augere vel minuere licet, uti ſupra* (k) *notatum eſt. Proponatur circulum deſcribere qui ſit alterius dati quintuplus; ſitque dati circuli radius AB; inter quem, & rectam BC, ipſius AB quintuplam inveniatur media proportionalis BX. Circulus radio BX deſcriptus erit circuli dati quintuplus.*

[e] Per 15. & 34. l. 5. [f] Per ſch. poſt 20. l. 6. [g] Per 11. l. 6. (h] Per hanc prop. & def. 10. l. 5. (i) Per cor. 3. Pr. 19. l. 6. [K) Vide cor 4. pr. 20. l. 6.

Cor. 5. *Si quatuor rectæ fuerint proportionales; figuræ ſimiles rectilineæ, ſimiliterque deſcriptæ ſuper duabus rectis prioribus proportionales erunt circulis quorum diametri vel ſemidiametri fuerint duæ poſteriores. Nam cum rectæ datæ ſint proportionales, & cum tam figuræ rectilineæ, quam circuli* (l) *ſint in earumdem rectarum ratione duplicata; erunt etiam figuræ circulis* (m) *proportionales.*

[l) Per 20. l. 6. & 2. l. 12. (m] Per 34. l. 7.

Cor.

Cor. 6. *E converſo, ſi duæ figuræ ſimiles rectilineæ duobus
circulis proportionales fuerint; erunt homologa rectilinearum
latera, circulorum diametris proportionalia. Cum enim ratio-*
(a) Per 20. l. 6. & 2. l. 12. *nes figurarum & circulorum æquales, duplicatæ* (a) *ſint ratio-
num homologorum laterum & diametrorum reſpective*, (b)
(b) Per 35. l. 5. *erunt etiam hæ rationes æquales.*

Cor. 7. *Hinc ſi detur circulo dato A æquale quadratum Q;
invenietur aliud quadratum X quod alteri cuivis circulo C æ-
quale ſit. Nam cum ex hypotheſi ſit A ad Q, ut C ad X,
erit permutando, A ad C ut Q ad X; & proinde* (per cor. 5.)
*radius circuli A ad radium circuli C, ut latus quadrati Q ad
latus quadrati X. Cum igitur dentur circulorum radii, & la-*
(c) Per 12. l. 6. *tus quadrati Q,* (c) *invenietur latus quadrati X, & proinde*
(d) Per 46. l. 1. (d) *ipſum X quadratum. Et quod in hoc corollario de quadra-
tis dictum eſt, idem de figuris rectilineis ſimilibus quibuſcum-*
(e) Per 12. & 18. l. 6. *que* (e) *dictum puta.*

Fig. 76. l. 6. Cor. 8. *Circulus ſuper hypotenuſa AB trianguli rectanguli
ABC, æqualis eſt duobus circulis qui deſcribuntur ſuper AC, BC*
(f) Per cor. 2. pr. 8. l. 6. *lateribus angulum rectum continentibus. Si enim ab angulo*
(g) Per idem. *recto C demittatur hypotenuſæ perpendicularis CO, erunt AB,
AC, AO* (f) ∺; *& itidem AB, CB, OB* (g) ∺ *Eſt itaque cir-*
(h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5. *culus ſuper AB, ad circulos ſuper AC, CB, reſpective, ut eſt*
(h) *AB ad AO, OB reſpective: & proinde,* (i) *circulus ſuper
AB ad circulos reliquos ſimul ſumptos eſt, ut AB ad AO + OB.*
(i) Per 24. l. 5. *Et cum ſit AB = AO + OB, erit etiam circulus ſuper AB
duobus reliquis ſimul ſumptis æqualis.*

Cor. 9. *Hinc datis circulorum quorumcumque diametris,
facile eſt illorum ſummam vel differentiam exhibere, hoc eſt,
circulum invenire, quotcumque & quibuſcumque circulis datis
æqualem; vel circulum deſcribere, cujus area circulorum quo-
rumvis inæqualium differentiæ æquetur: eadem ſcilicet me-
thodo, qua quadratorum ſumma vel differentia exhibetur in
ſchol. p. 47. l. 1. quod vide. In demonſtratione tantum pro p.
47. l. 1. citetur cor. 8. p. 2. l. 12.*

Cor. 10. *Hinc etiam Lunularum conjugatarum quadratu-*
Fig. 9. & 10. l. 12. *ram, quam primus docuit Hippocrates Chius, poſſumus deri-
vare. Sit enim ABC triangulum rectangulum, & BAC ſe-
micirculus diametro BC, BNA ſemicirculus diametro AB,
AMC ſemicirculus diametro AC deſcriptus. Eſt itaque ſe-*
(K) Per cor. 8. hujus. *micirculus BAC ſemicirculis BNA & AMC* (k) *æqualis.
Si igitur ſpatium utrimque commune auferas, nimirum ſeg-
menta BA, AC, relinquentur duæ lunulæ BNA, AMC,
utrimque lineis circularibus terminatæ, triangulo rectilineo
BAC æquales. Quod ſi recta BA æqualis ſit rectæ AC;*
Fig. 10. *hoc eſt, ſi lunulæ fuerint quadrantales, demiſſa perpendiculari*

AO

AO ad hypotenuſam BC, erit triangulum BAO æquale lunulæ BNA, & triangulum COA æquale lunulæ CMA. Q.E.I.

Scholium 1.

SImilia circulorum ſegmenta ABO, ILR ſunt in duplicata ratione diametrorum AF, IC, vel etiam in duplicata ratione rectarum AO, IR, quæ ſegmentorum arcubus ſubtenduntur. Biſectis enim arcubus ABO, ILR in B & L, ductiſque rectis AB, BO, IL, LR; propter arcus biſectos, ſubtenſæ (a) æquales erunt, nempe AB = BO, & IL = LR: Sed & ang. ABO = (b) ang. ILR. Similia igitur (c) ſunt triangula ABO, ILR; atque adeo ſunt in duplicata (d) ratione laterum AB, IL, ſive (e) diametrorum AF, IC quæ ſunt in circulis, vel etiam ſubtenſarum AO, IR. Et continua arcuum AB, BO, & IL, LR biſectione, figuræ polygonæ ſimiles perpetuo inſcribentur iiſdem ſegmentis, & ſuper iiſdem baſibus AO, IR, in ipſa ſegmenta tandem deſinentes; atque igitur (f) ipſa ſegmenta ABO, ILR erunt in duplicata ratione diametrorum AF, IC; vel in duplicata ratione ſubtenſarum AO, IR. Q.E.D.

Fig. 6. & 7.
(a) Per 27. l. 3.
(b) Per cor. 2. pr. 33. l. 6.
(c) Per 6. l. 6.
(d) Per 19. l. 6.
(e) Per cor. 3. pr. 2. l. 12.
(f) Per poriſma univ.

Scholium 2.

CUm quadratura lunularum conjugatarum quarumcumque conjunctim, quadrantalium vero ſeorſim, in coroll. 10. *oſtenſa ſit; liceat jam alia quædam de lunula quadrantali, de quadratura portionis ejuſdem, deque methodo eam in data ratione ſecandi, ſubjungere.*

1. *Compleatur Lunulæ quadrantalis circulus minor, & (g) tranſibit ejus circumferentia per circuli majoris centrum O.* Si *jam* in arcu lunulæ exteriori BNA ſumatur quodvis punctum E, juncta OE ſecabit arcus lunulæ proportionaliter in E & D, & proinde lunulam ſecabit in portiones (*h*) AED, BED. *Cum enim angulus BOE ſit ad centrum circuli majoris & ad circumferentiam circuli minoris, arcus BE* (i) *erit duplo plurium graduum quam arcus BD; & proinde ſemiperipheria BEA eſt ad quadrantem BDA, ut arcus BE ad arcum BD, ſive,* (k) *ut arcus EA ad arcum DA. Et permutando, arcus BE eſt ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA.*

Fig. 11.
(g) Per cor. 2. p. 9. l. 4.
(h) Per def. 7. l. 12.
(i) Sequitur ex cor. 4. ſcholii p. 5. l. 4.
(K) Per 16. & 7. l. 5.
Fig. 11. & 12.

2. *Si arcus EB, EA fuerint æquales, hoc eſt, ſi punctum E coincidat cum N, medio puncto ſemicirculi BNA; ductæ rectæ NB, NA perficient quadratum NAOB circulo minori inſcriptum, & circulum majorem tangent in B & A. Cum enim BNA ſemiperipheria circuli minoris biſecta ſit in N, erunt*

neum BEF portioni BED æquale, ac (a) *proinde quadratur portio BED lunulæ quadrantalis.*

(a) Per def. 6. l. 12.

9. Lunulam quadrantalem AOBN ſecundum rationem datam (ſcil. PQ ad QR) dividere in portiones AED, BED; & utriuſque portionis quadraturam exhibere. *Diametrum AB ſemicirculi minoris AEB divide* (b) *ſecundum rationem datam in I, & in eodem ſemicirculo, a puncto I, erigatur diametro BA perpendicularis IE; atque a puncto E ad O centrum circuli majoris, ducta recta EO lunulam in data ratione dividet. Similia* (c) *enim triangula BAO, BEF, ſunt in duplicata* (d) *ratione laterum homologorum AB, BE: hoc eſt, (propter AB, BE, BI* ÷ (e),) *ut* (f) *AB ad BI; atque ducta IO, in eadem ratione* (g) *eſt triangulum BAO ad triangulum BIO, propter eamdem altitudinem ad O. Cum igitur triangulum BAO ad triangula BEF, BIO eamdem* (h) *rationem habeat, erit triang. BIO* $=$ (i) *triang. BEF* $=$ (k) *portioni BED. Sed lunula tota triangulo BAO* (l) *æquatur; atque adeo portio EAD triangulo AIO* (m) *æquabitur. Eſt autem triangulum AIO ad triangulum BIO,* (n) *ut AI ad BI, ſive ut PQ ad QR; & proinde portio lunulæ AED erit ad portionem BED ut PQ ad QR. Lunula itaque quadrantalis in data ratione dividitur, & alio modo quadratura portionis BED exhibetur; unde tum eamdem portionem triangulo BIO, tum portionem alteram AED triangulo AIO æqualem eſſe conſtat. Datur itaque portionis utriuſque quadratura.*

(b) Per 9. l. 6.
(c) Per n. 6 hujus.
[d] Per 19. l. 6.
(e] Per cor. 2. p. 8. l. 6.
[f) Per def. 10. l. 5.
(g] Per 1. l. 6.
[h) Per 11. l. 5.
[i) Per 9 l. 5.
[K] Per n. 8. hujus.
[l) Per cor. 10. hujus.
[m) Per ax. 3. l. 1
(n) Per 1. l. 6.

Fig 12.

10. *Completo utroque circulo ABC, AOBN, ducatur diametro minoris BA parallela majoris diameter EF, eique ad rectos angulos circuli majoris diameter CD, quæ producta, tum lunulam ANB in duas æquales portiones, AND, BND, tum triangulum AOB in duo æqualia triangula AHO, BHO, toti & ſibi invicem ſimilia dividet. Dico quod ſpatii luniformis AGOIBECFA cornua AGOF, BIOE, triangulis AHO, BHO, (&* (o) *proinde lunulæ quadrantalis portionibus AND, BND) reſpective æqualia ſunt. Nam propter ABq* $=$ (p) *AOq* $+$ *BOq* $=$ *2 AOq, erit* (q) *ſegmentum ADB ſegmenti AGO duplum, atque ſemiſegmentum ADH ſegmento AGO æquale; quæ ſi a circuli majoris octantibus æqualibus AOD, AOF auferantur, remanebunt æqualia AHO, AGOF. Et ſimili modo oſtendetur BHO* $=$ *BIOE. Quadrantur itaque dicti ſpatii luniformis cornua AGOF, BIOE.*

[o) Per n. 9. hujus.
(p) Per 47. l. 1.
(q] Per ſch. 1. hujus, & ſchol. p. 20. l. 6.

11. *Iiſdem poſitis, in circulo minore compleatur quadratum BNAO, & centro N, radio NB vel NA* ($=$ (r) *OB vel OA*) *deſcribatur arcus quadrantalis BLA, eritque BLAO lunula quadrantalis, lunulæ BNAD ſimilis, & æqualis, ac proinde triangulo BNA vel BOA* (ſ) *æquabitur. Sed cornua*

(r] Per def. 32. l. 1.
(ſ) Per cor. 10. hujus prop.

 BIOE,

Digitized by Google

lares, eademque plana baſes erunt priſmatum æque multorum & æque altorum, utrique pyramidi inſcriptorum; & proinde eodem modo procedet demonſtratio, ac ſi rectæ PA, ZE fuiſſent ipſæ baſibus QAR, SEX perpendiculares.]

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. & 17. *PYramides quæcumque æque altæ, eam inter ſe rationem habent quam baſes (AB, CFO.)*

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O; pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX eſt ad pyramidem OZ, ut (*a*) A ad O; & pyramis (*b*) BX eſt ad pyramidem OZ ut B ad O. Ergo pyramides ſimul AX, BX (hoc eſt tota ABX) ſunt ad pyramidem OZ, ut A, B (*c*) ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis ABX eſt ad pyramidem FZ, ut (*d*) A, B eſt ad F: Et ABX eſt ad CZ, ut (*e*) A, B eſt ad C. Ergo ABX (*f*) eſt ad tres ſimul OZ, FZ, CZ, hoc eſt, ad totam pyramidem OFCZ, ut A, B ad O, F, C. Quod erat demonſtrandum.

[Corol. *Hinc ſequitur, pyramides quaſcumque æqualium baſium & altitudinum, æquales eſſe.*]

(a) Per præc.
(b) Per eamd.
(c) Per 24. l. 5.
(d) Per præc & 24. l. 5.
(e) Per eaſd.
(f) Per 34. l. 5.

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eamdem baſim & altitudinem.

Fig. 18. Sit primo pyramidis trigona BGAC, in eadem baſi & altitudine cum priſmate BACFEO, Ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO ſunt (*g*) paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA (*h*) æqualis eſt. Ob eamdem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF, hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OFAF æquales ſunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc eſt (*i*) BGAC, triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 19. Sit deinde pyramis quævis eamdem habens baſim & altitudinem cum priſmate AEFH. Ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, reſolve priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet

(g) Per 34. l. 1.
(h) Per ſer. præced.
(i) Per 22. præced.

Digitized by Google

patet demonſtratio ex prima parte. Nam ſingulæ partes priſmatis [*polygoni*,] triplæ erunt ſingularum partium pyramidis [*polygonæ; hoc eſt, ſingula priſmata triangularia ſingularum pyramidum triangularium tripla erunt.*] Ac proinde totum priſma [*polygonum*] totius pyramidis [*polygonæ*] triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio eſt triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.) Fig. 20.

Sint primo trigonæ. Perfectis parallelogrammis AM
& HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG, HL, in
altitudine pyramidum; quæ cum pyramides ſint ſimiles,
etiam patet ſimilia (*a*) eſſe. Ducantur jam EF, RP, & (a) *Ex defin.* 9. *l.* 11.
per EF, CB, item per RP, IN ſecabuntur (*b*) paralielepipeda in duo priſmata æqualia. Singula horum (*c*) tripla (b) *Per* 8. *l.* 11.
ſunt pyramidum OACB, KHIN. Utraque ergo ſimul, (c) *Per præc.*
hoc eſt, tota parallelepipeda AG, HL, ſextupla ſunt
pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio (*d*) triplicata eſt rationis la- [d] *Per* 33. *l.* 11.
terum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

Quo ſi pyramides ſimiles fuerint polygonæ, reſolvantur
in triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (*e*) oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi EK, & *Fig.* 21.
CR ipſi FK eſſe ſimiles. [*Ob ſimilia enim triangula*(f) (e) Ex 20. & 5. *l.* 6. & *ex defin.* 9. *l.* 11.
A, O; & (g) MIR, ZPK, (h) erit DM : MI :: ZV :
ZP; & MI : MR :: ZP : ZK. Ergo (i) *DM : MR ::*
ZV : ZK; & invertendo (k) *MR : MD :: ZK : ZV.* [f] Per 20. *l.* 6.
Eodem modo oſtendetur eſſe MD : RD : ZV : VK. Ergo (l) [g] *Per def.* 9 *l.* 11.
MR : RD :: ZK : VK. Similia (m) *ſunt igitur triangula*
MRD, ZKV, & proinde etiam pyramides AR, OK, quæ ſimi- [h] *Per def.* 1 *l.* 6.
libus triangulis multitudine æqualibus continentur, ſimiles [i] *Per* 22. *l.* 5.
(n) *ſunt. Eodem modo, ob ſimilia triangula B, E; vel C, F,*
demoſtrabitur triangula DXR, VSK ſimilia eſſe, atque adeo (k) *Per ſch. poſt* 16. *l.* 5.
pyramidem BR ipſi EK, & CR ipſi FK ſimilem eſſe.] Ergo (l) *Per* 22. *l.* 5.
per 1. partem ratio pyramidum AR, OK eſt tripli-
cata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR, EK (m) *Per* 5. *l.* 6.
plicata eſt rationis MX ad SZ; hoc eſt denuo per hyp. (n) *Pe def.* 9. *l.* 11.
rationis IPM ad: & ratio pyramidum CR, FK eſt tri-
plicata rationis XQ ad ST, hoc eſt, rurſum IM ad PZ.
Cum ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis
IM ad PZ, etiam ratio (*o*) omnium ad omnes, (hoc eſt, [o] *Per* 12. *l.* 5.

lares, ead… ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata
torum & … rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.
& proin… [Coroll. Hinc, ſi fuerint quatuor rectæ continue pro-
PA, Z… portionales; erit prima ad quartam, ut eſt pyramis ſuper
lares.] … primam, ad pyramidem ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper
ſecundam. & proinde, datis pyramidum ſimilium ABCR,
OEFK lateribus homologis MX, ZS; ſi fiant MX,
ZS, G, H continue proportionales; erit pyramis ABCR
ad pyramidem OEFK, ut MX eſt ad H.]

Fig. 16. & 17.

PROPOSITIO IX.

ÆQuales pyramides reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æquales.

(a) Per præc.
(b) Per eamd.
(c) Per 2. l. 5.
(d) Per præc 24. l.
(e) … eaſd
(f) … l. 5

1. Pars. Sint primo [*æquales*] pyramides trigonæ BACO, HKNL. Perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt vero horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eædem quæ pyramidum: baſes vero BE, HR duplæ (*a*) ſunt baſium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur, ob parallelepipedorum æqualitatem, fit ut BE ad HR, ita (*b*) reciproce HK ad BA; etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNL, ita reciproce altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per 25. …

Quod ſi [*æquales*] pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus (*c*) reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per [*cor. p.*] 6. Sed pyramides ſic reductæ, per jam demonſtrata, reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant baſes & altitudines. Quod erat demonſtrandum.

(d) Per 34. l. 11.

2. Pars. [*Si baſes ſint trigonæ*] quoniam jam ponitur eſſe BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR, ut HK ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP (*d*) ſunt æqualia. Ergo ſextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonſtrandum.

(e) Per 25. l. 6.
[f] Per cor. p. 6. l. 12.

[*Quod ſi pyramides habeant baſes polygonas altitudinibus reciprocas; reducantur illæ ad* (e) *baſes trigonas* BCO, HNL, *polygonis æquales. Erit igitur* BCO *ad* HNL, *ut* HK *ad* BA, *atque adeo pyramides hæ trigonæ æquales erunt per jam demonſtrata: ergo etiam pyramides polygonæ, quæ trigonis ſunt* (f) *æquales, erunt etiam ipſæ æquales.*

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuſcumque priſmatis; cum hæc tripla (*a*) ſint pyramidum eamdem baſim & altitudinem habentium. Igitur [a) Per 7. l. 12.]

1. Priſmatum æque altorum eadem eſt proportio quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus p. 6.

2. Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyramid. p. 8. [*& proinde ſi dentur ſimilium priſmatum latera homologa, invenietur priſmatum ipſorum ad ſe invicem ratio, eodem modo quo ex iiſdem datis, pyramidum ratio inventa eſt, in cor. p. 8.*]

3. Æqualia priſmata reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cum præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium 1.

EX hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcumque priſmatum ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ducta; pyramidis vero ex tertia altitudinis parte ducta in baſim.

Ut ſi priſmatis altitudo ſit 5. pedum, baſis vero 25. pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æque altum ad AH. Erunt (*b*) BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma (*c*) producitur ex altitudine ſua in baſim BAC, hoc eſt (*d*) AE. Ergo etiam priſma AH fit ex altitudine ſua, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE. [Fig. 14. & 18. (b) Per cor. 1. hujus. (c) Per ſch. 1. p. 40. l. 11. (d) Per conſt.]

Hinc vero & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

[*Scholium 2.*

Dimenſio pyramidis truncatæ ABCESO, ex datis altitudine CE, baſibus parallelis ABC, OSE, earumque lateribus homologis BC, SE. [Fig. 13.]

Ut

Digitized by Google

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum ducta ad ſuperficiem utrimque pertingens.

Fig. 6. Generatur ſphæra, ſi ſemicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſive figura minores vel majores, in figuram deſinere dicuntur, cum ab ea tandem differre poſſunt quantitate minori quacumqne data, ſeu quantumvis parva.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab ea tandem deficiant defectu minori quocumque dato; inſcripta dicentur in figuram deſinere: Et ſi ea quæ alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocumque dato; dicentur rurſum circumſcripta deſinere In figuram.

Fig. 9. [7. *Si fiat triangulum BAC in ſemicirculo BDLC, & ſuper lateribus BA, AC pro diametris, ducantur ſemicirculi minores BNA, AMC; figuræ curvilineæ BDAN, ALCM, ſemiperipheria circuli minoris exterius, & arcu circuli majoris interius, ſingulæ terminatæ, ab earum inventore,* Lunulæ conjugatæ Hippocratis Chii *appellantur*.

Fig. 10. *Si arcus BDA, ALC ſint æquales, ac proinde quadrantes ſint peripheriæ majoris circuli, denominentur ejuſmodi lunulæ* quadrantales.

Fig. 11. *Si recta ED arcus lunulæ quadrantalis proportionaliter ſecet in E, D, ut ſit arcus BE ad arcum BA, ut arcus BD ad arcum DA, vocentur area AED, BED* portiones lunulæ quadrantalis.

8. *Lunula, vel ejuſdem portio* quadrati *dicitur, ſi ei æqualis figura rectilinea conſtrui poſſit*.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7. *Polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum* (*AF, IC*;) [atque adeo etiam ſemidiametrorum (AZ, IX.)]

Ducantur AO, FB; IR, LC. Quia polygona ponuntur ſimilia, æquales erunt (*a*) anguli OBA, RLI, & latera OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (*b*) anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iiſdem arcubus BA, LI inſiſtunt, ſunt (*c*) æquales. Anguli vero FBA, CLI in ſemicirculis ſunt

(a) Per def. 1. l. 6. (b) Per 6. l. 6. (c) Per 21. l. 3.

(a) re-

(*a*) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC (*b*) æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL ſibi mutuo æquiangula ſunt, erunt (*c*) ſimilia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata (*d*) proportionis laterum BA, LI; hoc eſt, ut jam oſtendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC, [*ac proinde* (e) *etiam ſemidiametrorum AZ, IX*.] Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per 31 l.3.*
(b) *Per cor. 9.p 32. l.1.*
(c) *Per 4. l.6.*
(d) *Per 20 l.6.*
(e) *Per 15. l.5.*

Corollaria.

1. POlygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe ut diametri. *Fig. 6. & 7.*

Cum oſtenſum jam ſit AB eſſe ad LI, ut AF ad IC; etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC: & ſic de ceteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera ad ſimul omnia, (hoc eſt ambitus ad ambitum) ſunt ut AF ad IC.

[2. *Figurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum, latera homologa ſunt inter ſe ut circulorum diametri.*]

Lemma.

POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt.

Inſcribe quadratum ACBD. Cum hoc dimidium ſit quadrati (*f*) circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur e circulo, auferetur plus quam dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in E, K, I, H, inſcribe octogonum: & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G & F: erit CF (*g*) parallelogrammum, cujus cum dimidium ſit triangulum (*h*) CEA, erit hoc plus quam dimidium ſegmenti CEA. Eodem modo ſingula triangula AKD, DIB, &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium ſegmentorum plus quam dimidia ſunt. Hæc ergo [*triangula*] ſi ex illis [*ſegmentis*] hoc eſt, ex reſiduo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum, oſtendam e reſiduo circuli ſemper auferri plus quam dimidium. Ergo reſiduum erit tandem (*i*) minus quocumque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem a circulo deficient quantitate minori data quacumque; hoc eſt, in circulum (*k*) deſinent. Q. e d.

Fig. 8.
(f) *Per ſch. poſt 6. & 7. l. 4.*
(g) *Per cor. p.28. & 29. l.1.*
(h) *Per 41. l.1.*
(i) *Patet ex lem.1. ſch. poſt 11. l.6.*
[k] *Per defin.6. l. 12.*

[*Haud abſimili methodo demonſtrari poſſet, polygona circulo circumſcripta in circulum deſinere. Verum cum hoc inter alia nec non & ipſum Lemma præcedens, in prop.3. Theorematum ex Archimede ſelectorum contineantur, ſuperfluum eſſet hic loci plura ſubjungere.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. *Circulorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum.*

Polygonorum ſimilium circulis ſine fine inſcriptorum proportio ſemper duplicata (*a*) eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulis in infinitum inſcripta, in circulos (*b*) deſinunt. Ergo per poriſma univerſale ſequens, etiam circulorum proportio duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 1. l. 12. (b) Per lem.

Poriſma univerſale.

Si ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant; quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eamdem habent & figuræ.

R
A B X Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eamdem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur; ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant (*c*) minori quantitate, quam R deficiat a figura A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quam R. Ergo C eſt ad B in (*d*) majori, quam R ad B; hoc eſt, (ut ponebatur,) quam X ad Z; hoc eſt, per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in maiori proportione, quam ad F, erit B figura minor (*e*) ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur rationem B ad A non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X, [*hoc* (f) *eſt, rationem A ad B non eſſe minorem ratione X ad Z.*] Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per def. 6. l. 12. (d) Per 8. l. 5. (e) Per 10. l. 5. (f) Per 26. l. 5.

[*Eadem methodo demonſtrabitur, duas figuras eamdem inter ſe proportionem habere, quam ſemper habent circumſcripta in illas deſinentia; hoc modo:*

GF.
A B X Z
R

Sit ratio X ad Z ea quam circumſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eamdem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea quæ figuris circumſcribuntur; ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z.

Ergo

Ergo erit A ad aliam quamdam quantitatem R, ipſa majorem, ut X ad Z. Et quoniam circumſcripta per hypotheſin deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B circumſcripta, quæ ipſas excedant quantitate (a) *minori quam R excedat figuram B. Sint ea C & F. Ergo F minus erit quam R. Ergo* (b) *ratio A ad F major eſt ratione A ad R; hoc eſt, ratione X ad Z, ſive C ad F. Quoniam igitur ratio A ad F major eſt ratione C ad F, figura A major* (c) *erit ſibi circumſcripto C, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur eſt ratio A ad B major ratione X ad Z. Eodem modo oſtendetur rationem B ad A non eſſe ratione Z ad X majorem, &* (d) *proinde rationem A ad B non minorem eſſe ratione X ad Z. Si itaque ratio A ad B neque major neque minor eſt ratione X ad Z; erit ei æqualis. Q. E. D.*

(a) Per def. 6. l. 12.
[b] Per 8. l. 5.
[c] Per 10. l. 5.
(d) Per 26. l. 5.

Corollaria ad Prop. II.

Cor. 1. *Hinc, ut circulus eſt ad circulum, ita polygonum in illo deſcriptum erit ad ſimile polygonum in hoc deſcriptum. Utraque enim ſunt in duplicata ratione diametrorum quæ ſunt in circulis.* Fig. 6. & 7.

Cor. 2. *Hinc etiam liquet circulos eſſe ad ſe invicem, in ratione radiorum ſuorum* (e) *duplicata; hoc eſt, ut* (f) *quadrata radiorum,*

Cor. 3. *Hinc etiam, circulorum quorum diametri vel ſemidiametri ſunt notæ, proportio innoteſcit;* (g) *inveniendo nimirum diametris datis tertiam proportionalem, ad quam circuli primi diameter eamdem* (h) *habebit rationem, quam habet circulus iſte primus ad ſecundum. Sit circuli primi diameter pedum quatuor, ſecundi pedum ſex; cum ſint 4, 6, 9. continue* (i) *proportionales, erit circulus primus ad ſecundum ut 4. ad 9.*

Cor. 4. *Hinc etiam, circulum quemvis in data ratione augere vel minuere licet, uti ſupra* (k) *notatum eſt. Proponatur circulum deſcribere qui ſit alterius dati quintuplus; ſitque dati circuli radius AB; inter quem, & rectam BC, ipſius AB quintuplam inveniatur media proportionalis BX. Circulus radio BX deſcriptus erit circuli dati quintuplus.*

[e] Per 15. & 34. l. 5.
[f] Per ſch. poſt 20. l. 6.
(g) Per 11. l. 6.
(h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5.
(i) Per cor. 3. pr. 17. l. 6.
[k] Vide cor 4. pr. 20. l. 6.

Cor. 5. *Si quatuor rectæ fuerint proportionales; figuræ ſimiles rectilineæ, ſimiliterque deſcriptæ ſuper duabus rectis prioribus proportionales erunt circulis quorum diametri vel ſemidiametri fuerint duæ poſteriores. Nam cum rectæ datæ ſint proportionales, & cum tam figuræ rectilineæ, quam circuli* (l) *ſint in earumdem rectarum ratione duplicata; erunt etiam figuræ circulis* (m) *proportionales.*

[l] Per 20. l. 6. & 2. l. 12.
(m) Per 34. l. 7.

Cor.

Digitized by Google

Cor. 6. *E converſo, ſi duæ figuræ ſimiles rectilineæ duobus circulis proportionales fuerint; erunt homologa rectilinearum latera, circulorum diametris proportionalia. Cum enim rationes figurarum & circulorum æquales, duplicatæ* (a) *ſint rationum homologorum laterum & diametrorum reſpective,* (b) *erunt etiam hæ rationes æquales.*

(a) Per 20. l. 6. & 2. l. 12.
(b) Per 33. l. 5.

Cor. 7. *Hinc ſi detur circulo dato A æquale quadratum Q; invenietur aliud quadratum X quod alteri cuivis circulo C æquale ſit. Nam cum ex hypotheſi ſit A ad Q, ut C ad X, erit permutando, A ad C ut Q ad X; & proinde (per cor. 5.) radius circuli A ad radium circuli C, ut latus quadrati Q ad latus quadrati X. Cum igitur dentur circulorum radii, & latus quadrati Q,* (c) *invenietur latus quadrati X, & proinde* (d) *ipſum X quadratum. Et quod in hoc corollario de quadratis dictum eſt, idem de figuris rectilineis ſimilibus quibuſcumque* (e) *dictum puta.*

(c) Per 12. l. 6.
(d) Per 46. l. 1.
(e) Per 12. & 18. l. 6.

Fig. 76. l. 6.

Cor. 8. *Circulus ſuper hypotenuſa AB trianguli rectanguli ABC, æqualis eſt duobus circulis qui deſcribuntur ſuper AC, BC lateribus angulum rectum continentibus. Si enim ab angulo recto C demittatur hypotenuſæ perpendicularis CO, erunt AB, AC, AO* (f) ∺; *& itidem AB, CB, OB* (g) ∺ *Eſt itaque circulus ſuper AB, ad circulos ſuper AC, CB, reſpective, ut eſt* (h) *AB ad AO, OB reſpective: & proinde,* (i) *circulus ſuper AB ad circulos reliquos ſimul ſumptos eſt, ut AB ad AO + OB. Et cum ſit AB = AO + OB, erit etiam circulus ſuper AB duobus reliquis ſimul ſumptis æqualis.*

(f) Per cor. 2. pr. 8. l. 6.
(g) Per idem.
(h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5.
(i) Per 24. l. 5.

Cor. 9. *Hinc datis circulorum quorumcumque diametris, facile eſt illorum ſummam vel differentiam exhibere, hoc eſt, circulum invenire, quotcumque & quibuſcumque circulis datis æqualem; vel circulum deſcribere, cujus area circulorum quorumvis inæqualium differentiæ æquetur: eadem ſcilicet methodo, qua quadratorum ſumma vel differentia exhibetur in ſchol. p. 47. l. 1. quod vide. In demonſtratione tantum pro p. 47. l. 1. citetur cor. 8. p. 2. l. 12.*

Fig. 9. & 10. l. 12.

Cor. 10. *Hinc etiam Lunularum conjugatarum quadraturam, quam primus docuit Hippocrates Chius, poſſumus derivare. Sit enim ABC triangulum rectangulum, & BAC ſemicirculus diametro BC, BNA ſemicirculus diametro AB, AMC ſemicirculus diametro AC deſcriptus. Eſt itaque ſemicirculus BAC ſemicirculis BNA & AMC* (k) *æqualis. Si igitur ſpatium utrimque commune auferas, nimirum ſegmenta BA, AC, relinquentur duæ lunulæ BNA, AMC, utrimque lineis circularibus terminatæ, triangulo rectilineari BAC æquales. Quod ſi recta BA æqualis ſit rectæ AC; hoc eſt, ſi lunulæ fuerint quadrantales, demiſſa perpendiculari*

(K) Per cor. 8. hujus.

Fig. 10.

AO

AO ad pypotenuſam BC, erit triangulum BAO æquale lunulæ BNA, & triangulum COA æquale lunulæ CMA. Q.E.I.

Scholium 1.

Similia circulorum ſegmenta ABO, ILR ſunt in duplicata ratione diametrorum AF, IC, vel etiam in duplicata ratione rectarum AO, IR, quæ ſegmentorum arcubus ſubtenduntur. Biſectis enim arcubus ABO, ILR in B & L, ductiſque rectis AB, BO, IL, LR; propter arcus biſectos, ſubtenſæ (a) æquales erunt, nempe AB = BO, & IL = LR: Sed & ang. ABO = (b) ang. ILR. Similia igitur (c) ſunt triangula ABO, ILR; atque adeo ſunt in duplicata (d) ratione laterum AB, IL, ſive (e) diametrorum AF, IC quæ ſunt in circulis, vel etiam ſubtenſarum AO, IR. Et continua arcuum AB, BO, & IL, LR biſectione, figuræ polygonæ ſimiles perpetuo inſcribentur iiſdem ſegmentis, & ſuper iiſdem baſibus AO, IR, in ipſa ſegmenta tandem deſinentes; atque igitur (f) ipſa ſegmenta ABO, ILR erunt in duplicata ratione diametrorum AF, IC; vel in duplicata ratione ſubtenſarum AO, IR. Q.E.D.

[Fig. 6. & 7.]
[(a) Per 27. l. 3.]
[(b) Per cor. 2. pr. 33. l. 6.]
[(c) Per 6. l. 6.]
[(d) Per 19. l. 6.]
[(e) Per cor. 3. pr. 1. l. 12.]
[(f) Per poriſma univ.]

Scholium 2.

Cum quadratura lunularum conjugatarum quarumcumque conjunctim, quadrantalium vero ſeorſim, in coroll. 10. oſtenſa ſit; liceat jam alia quædam de lunula quadrantali, de quadratura portionis ejuſdem, deque methodo eam in data ratione ſecandi, ſubjungere.

1. *Compleatur Lunulæ quadrantalis circulus minor, & (g) tranſibit ejus circumferentia per circuli majoris centrum O.* Si *jam* in arcu lunulæ exteriori BNA ſumatur quodvis punctum E, juncta OE ſecabit arcus lunulæ proportionaliter in E & D, & proinde lunulam ſecabit in portiones (*h*) AED, BED. *Cum enim angulus* BOE *ſit ad centrum circuli majoris & ad circumferentiam circuli minoris, arcus* BE (i) *erit duplo plurium graduum quam arcus* BD; *& proinde ſemiperipheria* BEA *eſt ad quadrantem* BDA, *ut arcus* BE *ad arcum* BD, *ſive,* (k) *ut arcus* EA *ad arcum* DA. *Et permutando, arcus* BE *eſt ad arcum* EA, *ut arcus* BD *ad arcum* DA.

[Fig. 11.]
[(g) Per cor. 2. p. 9. l. 4.]
[(h) Per def. 7. l. 12.]
[(i) Sequitur ex cor. 4. ſcholii p. 5. l. 4.]
[(K) Per 16. & 9. l. 5. Fig. 11. & 12.]

2. *Si arcus* EB, EA *fuerint æquales, hoc eſt, ſi punctum* E *coincidat cum* N, *medio puncto ſemicirculi* BNA; *ductæ rectæ* NB, NA *perficient quadratum* NAOB *circulo minori inſcriptum, & circulum majorem tangent in* B & A. *Cum enim* BNA *ſemiperipheria circuli minoris biſecta ſit in* N, *erunt*

neum BEF *portioni* BED *æquale , ac* (a) *proinde quadratur portio* BED *lunulæ quadrantalis.*

(a) Per def. 3. l. 12.

9. Lunulam quadrantalem A[E]BN ſecundum rationem datam (ſcil. PQ ad QR) dividere in portiones AED, BED; & utriuſque portionis quadraturam exhibere. *Diametrum* AB *ſemicirculi minoris* AEB *divide* (b) *ſecundum rationem datam in* I, *& in eodem ſemicirculo, a puncto* I, *erigatur diametro* BA *perpendicularis* IE; *atque a puncto* E *ad* O *centrum circuli majoris, ducta recta* EO *lunulam in data ratione dividet. Similia* (c) *enim triangula* BAO, B[E]F, *ſunt in duplicata* (d) *ratione laterum homologorum* AB, B[E]; *hoc eſt, (propter* AB, B[E], BI ÷÷ (e),) *ut* (f) AB *ad* BI; *atque ducta* IO, *in eadem ratione* (g) *eſt triangulum* BAO *ad triangulum* BIO, *propter eamdem altitudinem ad* O. *Cum igitur triangulum* BAO *ad triangula* BEF, BIO *eamdem* (h) *rationem habeat, erit triang.* BIO = (i) *triang.* BEF = (k) *portioni* BED. *Sed lunula tota triangulo* BAO (l) *æquatur; atque adeo portio* EAD *triangulo* AIO (m) *æquabitur. Eſt autem triangulum* AIO *ad triangulum* BIO, (n) *ut* AI *ad* BI, *ſive ut* PQ *ad* QR; *& proinde portio lunulæ* AED *erit ad portionem* BED *ut* PQ *ad* QR. *Lunula itaque quadrantalis in data ratione dividitur, & alio modo quadratura portionis* BED *exhibetur; unde tum eamdem portionem triangulo* BIO, *tum portionem alteram* AED *triangulo* AIO *æqualem eſſe conſtat. Datur itaque portionis utriuſque quadratura.*

(b) Per 9. l. 6.
(c) Per n. 6 hujus.
[d) Per 19. l. 6.
(e] Per cor. 2. p. 8. l. 6.
[f) Per def. 10. l. 5.
(g] Per 1. l. 6.
[h) Per 11. l. 5.
[i) Per 9 l. 5.
[K] Per n. 8. hujus.
[l) Per cor. 10. hujus.
[m) Per ax. 3. l. 1.
(n) Per 1. l. 6.

Fig 12.

10. *Completo utroque circulo* ABC, AOBN, *ducatur diametro minoris* BA *parallela majoris diameter* EF, *eique ad rectos angulos circuli majoris diameter* CD, *quæ producta, tum lunulam* ANB *in duas æquales portiones*, AND, BND, *tum triangulum* AOB *in duo æqualia triangula* AHO, BHO, *toti & ſibi invicem ſimilia dividet. Dico quod ſpatii luniformis* AGOIBECFA *cornua* AGOF, BIO[E], *triangulis* AHO, BHO, (*&* (o) *proinde lunulæ quadrantalis portionibus* AND, BND) *reſpective æqualia ſunt. Nam propter* $ABq = $ (p) $AOq + BOq = 2\ AOq$, *erit* (q) *ſegmentum* ADB *ſegmenti* AGO *duplum, atque ſemiſegmentum* ADH *ſegmento* AGO *æquale; quæ ſi a circuli majoris octantibus æqualibus* AOD, AOF *auferantur, remanebunt æqualia* AHO, AGOF. *Et ſimili modo oſtendetur* BHO = BIOE. *Quadrantur itaque dicti ſpatii luniformis cornua* AGOF, BIOE.

[o) Per n. 9. hujus.
(p) Per 47. l. 1.
(q] Per ſch. 1. hujus, & ſchol. p. 10. l. 6.

11. *Iiſdem poſitis, in circulo minore compleatur quadratum* BNAO, *& centro* N, *radio* NB *vel* NA (= (r) OB *vel* OA) *deſcribatur arcus quadrantalis* BLA, *eritque* BLAO *lunula quadrantalis, lunulæ* BNAD *ſimilis, & æqualis, ac proinde triangulo* BNA *vel* BOA (ſ) *æquabitur. Sed cornua*

(r] Per def. 32. l. 1.
(ſ) Per cor. 10. hujus prop.

Digitized by Google

(a) Per n. 10.

BIOE, AGOF ſimul ſumpta eidem triangulo (a) æquantur. Ergo ſpatium mixtilineum BLAFE duplici triangulo BOA, ſive quadrato BNAO æquale eſt.]

PROPOSITIO III. & IV.

Sunt prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quam ut per eas demonſtraretur quinta, quam nos ſine illis multo facilius demonſtrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

Fig. 13.

SI duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, , IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ACB, IQV.)

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur a planis BFG, AFB, AFC; erunt ſectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC (*a*) parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales (*b*) ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC (*c*) ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt duplicata (*d*) rationis laterum BC, SE; & ratio ſectionis IVQ ad RXZ duplicata eſt rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ ſunt eædem: (eſt enim BC ad SE, ut (*e*) CF ad EF, hoc eſt per hyp. ut QL ad ZL; hoc (*f*) eſt, ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC ad OSE eadem eſt (*g*) cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propoſitum.

(a) Per 16. l. 11.
(b) Per 10. l. 11
[c] Per 4 l. 6.
[d] Per 19. l. 6.
(e] Per cor. 1 p. 4. l. 6.
(f) Per idem cor.
(g) Per 34. l. 5.

I I.

Fig. 14.

PYramidi (ZCAF) triangulam habenti baſim, priſmata in infinitum inſcripta, deſinunt in ipſam pyramidem.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B, G, factis ſectionibus BEP & GDN baſi ZAC parallelis, inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circumſcripta

ſcripta priſmata CIBA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt ſolida IM, XK, HG, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA. Nam HG eſt (*a*) æquale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB, hoc eſt (*b*) MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur; AB fiet (*c*) quavis data minor. Ergo etiam (*d*) priſma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſmata, fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem (*e*) tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 25. l. 11
(b) Per eand.
(c) Collig. ex lem. 2. ſch. poſt 23. l. 6.
(d) Patet ex 25. l. 11.
(e) Per def. 6. l. 12.

PROPOSITIO V.

P*Yramides triangulares æque altæ, eam inter ſe proportionem habent quam baſes* (*AQR, ESX.*) *Fig. 1.*

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas, utrimque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æque multa & æque alta. Jam vero quia priſmata LA, IE ſunt æque alta, erit priſma LA ad priſma IE, ut (*f*) baſis LOB ad baſim INK; hoc eſt (*g*) ut baſis QRA ad baſim SXE. Eodem modo oſtendam ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta, eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam (*h*) ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cum ea tandem deſinant (*i*) in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt (*k*) ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

(f) Per cor. 1 p 34. l. 11.
(g) Per lem. 1.
(h) Per 12. l. 5.
(i) Per lem.
(K) Per prop. univerſ. poſt p. 12 l. 12.

[*Demonſtratio ſupponit latera AP EZ pyramidum, æquales earum altitudines exhibere, & proinde eſſe ad baſes QAR, SEX recta. Sed vim ſuam retinebit demonſtratio, quamvis latera illa ſint ad baſes quovis modo obliqua, ſi concipiantur a verticibus P, Z perpendiculares ad baſes demitti, & in æquales quotcumque partes, & æque multas utrimque dividi, & per diviſionum puncta tranſire ſupponantur plana baſibus parallela, quæ itaque rectas PA, ZE divident* (l) *in partes ſimiles, & numero æquales iis in quas dividuntur perpendiculares,*

(l) Per 17. l. 11.

lares, eademque plana baſes erunt priſmatum æque multorum & æque altorum, utrique pyramidi inſcriptorum; & proinde eodem modo procedet demonſtratio, ac ſi rectæ PA, ZE fuiſſent ipſa baſibus QAR, SEX perpendiculares.]

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. & 17. P*Yramides quæcumque æque altæ, eam inter ſe rationem habens quam baſes* (AB, CFO.)

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O; pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX eſt ad pyramidem OZ, ut *a*) A ad O; & pyramis (*b* BX eſt ad pyramidem OZ ut B ad O. Ergo pyramides ſimul AX, BX (hoc eſt tota ABX) ſunt ad pyramidem OZ, ut A, B (*c* ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis ABX eſt ad pyramidem FZ, ut(*d*) A, B eſt ad F: Et ABX eſt ad CZ, ut (*e*) A, B eſt ad C. Ergo ABX (*f*) eſt ad tres ſimul OZ, FZ, CZ, hoc eſt, ad totam pyramidem OFCZ, ut A, B ad O, F, C. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per prec.*
(b) *Per eamd.*
(c) *Per 24. l. 5.*
(d) *Per prec & 24. l. 5.*
(e) *Per eaſd.*
(f) *Per 24. l. 5.*

[Corol. *Hinc ſequitur, pyramides quaſcumque æqualium baſium & altitudinum, æquales eſſe.*]

PROPOSITIO VII.

O*Mnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eamdem baſim & altitudinem.*

Fig. 18. Sit primo pyramidis trigona BGAC, in eadem baſi & altitudine cum priſmate BACFEO, Ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO ſunt (*g*) paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA (*h*) æqualis eſt. Ob eamdem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF, hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OFAF æquales ſunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc eſt (*i* BGAC, triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

(g) *Per 34. l. 1.*
(h) *Per cor. præced.*
(i) *Per 22. præced.*

Fig. 19. Sit deinde pyramis quævis eamdem habens baſim & altitudinem cum priſmate AEFH. Ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, reſolve priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet

patet demonſtratio ex prima parte. Nam ſingulæ partes priſmatis [*polygoni*,] triplæ erunt ſingularum partium pyramidis [*polygonæ; hoc eſt, ſingula priſmata triangularia ſingularum pyramidum triangularium tripla erunt.*] Ac proinde totum priſma [*polygonum*] totius pyramidis [*polygonæ*] triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio eſt triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.) Fig. 20.

Sint primo trigonæ. Perfectis parallelogrammis AM & HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG, HL, in altitudine pyramidum; quæ cum pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia (a) eſſe. Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, item per RP, IN ſecabuntur (b) parallelepipeda in duo priſmata æqualia. Singula horum (c) tripla ſunt pyramidum OACB, KHIN. Utraque ergo ſimul, hoc eſt, tota parallelepipeda AG, HL, ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio (d) triplicata eſt rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

(a) Ex defin. 9. l. 11. (b) Per 8. l. 11. (c) Per prec. (d) Per 33. l. 11.

Quo ſi pyramides ſimiles fuerint polygonæ, reſolvantur in triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (e) oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi EK, & CR ipſi FK eſſe ſimiles. [*Ob ſimilia enim triangula* (f) *A, O; &* (g) *MIR, ZPK,* (h) *erit DM : MI :: ZV : ZP; & MI : MR :: ZP : ZK. Ergo* (i) *DM : MR :: ZV : ZK; & invertendo* (k) *MR : MD :: ZK : ZV. Eodem modo oſtendetur eſſe MD : RD : ZV : VK. Ergo* (l) *MR : RD :: ZK : VK. Similia* (m) *ſunt igitur triangula MRD, ZKV, & proinde etiam pyramides AR, OK, quæ ſimilibus triangulis multitudine æqualibus continentur, ſimiles* (n) *ſunt. Eodem modo, ob ſimilia triangula B, E; vel C, F, demoſtrabitur triangula DXR, VSK ſimilia eſſe, atque adeo pyramidem BR ipſi EK, & CR ipſi FK ſimilem eſſe.*] Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK eſt triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR, EK plicata eſt rationis MX ad SZ; hoc eſt denuo per hyp. rationis IPM ad: & ratio pyramidum CR, FK eſt triplicata rationis XQ ad ST, hoc eſt, rurſum IM ad PZ. Cum ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio (o) omnium ad omnes, (hoc eſt,

Fig. 21. (e) Ex 20. & 5. l. 6. & ex defin. 9. l. 11. [f] Per 20. l. 6. [g] Per def. 9 l. 11. [h] Per def. 1 l. 6. [i] Per 22. l. 5. (k) Per ſch. pot 16. l. 5. [l] Per 22. l. 5. (m) Per 5. l. 6. (n) Pe def. 9. l. 11. [o] Per 12. l. 5.

Digitized by Google

ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

[Corol. *Hinc, ſi fuerint quatuor rectæ continue proportionales; erit prima ad quartam, ut eſt pyramis ſuper prima, ad pyramidem ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper*
Fig. 21. *ſecunda; & proinde, datis pyramidum ſimilium ABCR, OEFK lateribus homologis MX, ZS; ſi fiant MX, ZS, G, H continue proportionales, erit pyramis ABCR ad pyramidem OEFK, ut MX eſt ad H.*]

PROPOSITIO IX.

Fig. 22. & 23. *Æquales pyramides reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æquales.*

1. Pars. Sint primo [*æquales*] pyramides trigonæ BACO, HKNL. Perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt vero horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eædem quæ pyramidum:
(a) Per 34. l. 11. baſes vero BE, HR duplæ (*a*) ſunt baſium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur, ob parallelepipedorum æqualitatem, fit ut BE
(b) Per 34. l. 11. ad HR, ita (*b*) reciproce HK ad BA; etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNL, ita reciproce altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonſtrandum.

Quod ſi [*æquales*] pyramides habeant baſes polygo-
(c) Per 25. l. 6. nas, retentis iiſdem altitudinibus (*c*) reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per [*cor. p.*] 6. Sed pyramides ſic reductæ, per jam demonſtrata, reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant baſes & altitudines. Quod erat demonſtrandum.

2. Pars. [*Si baſes ſint trigonæ*] quoniam jam ponitur eſſe BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR, ut HK ad BA. Ergo parallelepipeda BF,
(d) Per 34. l. 11. HP (*d*) ſunt æqualia. Ergo ſextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonſtrandum.

[*Quod ſi pyramides habeant baſes polygonas altitudi-*
(e) Per 25. l. 6. *nibus reciprocas; reducantur illæ ad* (e) *baſes trigonas BCO, HNL, polygonis æquales. Erit igitur BCO ad HNL, ut HK ad BA, atque adeo pyramides hæ trigonæ æquales erunt per jam demonſtrata: ergo etiam pyra-*
[f] Per cor. p. 6. l. 12. *mides polygonæ, quæ trigonis ſunt* (f) *æquales, erunt etiam ipſæ æquales.*

Cor-

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt qubuſcumque priſmatis; cum hæc tripla (*a*) ſint pyramidum eamdem baſim & altitudinem habentium. Igitur [a] *Per 7. l. 12.*

1. Priſmatum æque altorum eadem eſt proportio quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus p. 6.

2. Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyramid. p. 8. [*& proinde ſi dentur ſimilium priſmatum latera homologa, invenietur priſmatum ipſorum ad ſe invicem ratio, eodem modo quo ex iiſdem datis, pyramidum ratio inventa eſt, in cor. p. 8.*].

3. Æqualia priſmata reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cum præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium 1.

EX hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcumque priſmatum ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ducta; pyramidis vero ex tertia altitudinis parte ducta in baſim.

Ut ſi priſmatis altitudo ſit 5. pedum, baſis vero 25. pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æque altum ad AH. Erunt (*b*) BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma (*c*) producitur ex altitudine ſua in baſim BAC, hoc eſt (*d*) AE. Ergo etiam priſma AH fit ex altitudine ſua, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE. *Fig. 14. & 18.* (b) *Per cor. 1. hujus.* (c) *Per ſch. 1. p. 40. l. 11.* (d) *Per conſt.*

Hinc vero & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

[*Scholium* 2.

Dimenſio pyramidis truncatæ ABCESO, ex datis altitudine CE, baſibus parallelis ABC, OSE, earumque lateribus homologis BC, SE. *Fig. 17.*

Ut

Ut inveniatur EF altitudo partis deficientis ESOF; propter ſim. tri. BCF, SEF, erit BC: SE :: CF: EF. Et divid. BC —SE: SE: CE: EF. Datis itaque BC, SE & CE, invenietur EF. Atque hac quidem demonſtratio ſupponit altitudinem perpendicularem cum latere pyramidis coincidere; ſed utcumque cadat perpendicularis illa, planum OSB (ſi opus, continuatum) altitudinem pyramidis & latus ejus FC ſimiliter ſecabit; & proinde ſemper erit BC—SE ad SE, ut altitudo pyramidis truncatæ, ad altitudinem partis deficientis. Cujus altitudinis ſic inventæ pars tertia in baſem minorem OSE ducta, dabit partis deficientis ESOF ſoliditatem. Inventæ autem altitudini partis deficientis, addatur altitudo data pyramidis truncatæ, & habetur altitudo pyramidis integræ; cujus altitudinis pars tertia in baſim majorem ducta, pyramidis integræ ſoliditatem dabit: e qua, deducta pars, deficiens, pyramidem truncatam relinquet.]

Lemma ad P. 10.

PYramides & priſmata, quæ conis & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos & cylindros deſinunt.

Demonſtratur ut lemma propoſitionis 2. adminiculo propoſitionis 6. & corollarii 1. poſt. p. 9. ſi ut iſtic plana circulo inſcripta, ita hic pyramides & priſmata, quæ ſuper planis illis tamquam baſibus conſiſtunt, a cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Fig. 24. *OMnis conus tertia pars eſt cylindri eamdem baſim & altitudinem habentis.*

Baſi CL intelligatur inſcribi polygonum regulare quotcumque laterum, & ſuper illo tamquam baſi, cono quidem pyramis, cylindro autem priſma inſcribi. Erit pyramis *(a)* tertia pars priſmatis. Et ſi rurſum inſcribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis, & cylindro priſma; iterum erit pyramis tertia pars priſmatis; Atque hoc ſemper eveniet. Quare cum pyramides in conum, (*b*) priſmata in cylindrum deſinant, etiam (*c*) conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 7. l. 12.

(b) Per hanc prop.

(c) Per ax. univ. poſt. 2. l. 12.

[Scholium. *Notandum vero eſt, hanc propoſitionem & ſequentes duas, non ſolum ad rectos conos & cylindros, verum etiam*

etiam ad quoſcumque obliquos pertinere, quamvis figura rectos tantum exhibeant. D ducuntur enim a ſimilibus pyramidum & priſmatum quorumcumque, *non a* rectorum *ſolorum proprietatibus.*]

PROPOSITIO XI.

Conorum æque altorum (BAF, QXR) proportio eadem eſt quæ baſium (CL, SE.) Idem accidit cylindris æque altis. Fig. 24. & 25.

Pyramides conis æque altis inſcriptæ, ſunt (*a*) ut baſes. Atqui (*b*) pyramides tandem in conos deſinunt. Ergo etiam (*c*) coni ſunt ut baſes. Cum vero cylindri conorum eamdem cum ipſis baſim & altitudinem habentium ſint tripli; etiam ipſi erunt ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 6. l. 12.
(b) Per lem. ante 10.
(c) Per poriſ. univ.

Corollarium.

Eodem modo demonſtrabitur etiam priſmata & cylindros æque alta eſſe inter ſe ut baſes, imo quælibet corpora cylindriformia æque alta, hoc eſt, quæ producuntur ex quibuſcumque planis in eamdem altitudinem ductis, eſſe inter ſe ut baſes. Eodem modo de pyramidibus & conis æque altis, & conicis quibuſcumque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Conorum ſimilium (BAF & QZR) proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BF & QR) quæ ſunt in baſibus. Idem cylindris ſimilibus accidit. Fig. 24. & 25.

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata [*ejuſdem denominationis,* quæ proinde ſimilia erunt. *Si vero ſimiles coni fuerint ſcaleni, ita eorum baſibus inſcribantur polygona, ut axium inclinatio eumdem habeat ſitum reſpectu laterum vel angulorum utriuſque polygoni.*] Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis, etiam ſimiles ſunt; quod facile oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata (*d*) proportionis laterum BL, QE; hoc eſt, (*e*) proportionis diametrorum BF, QR. Quare cum pyramides (*f*) in conos deſinant, etiam conorum proportio (*g*) eſt triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonſtrandum.

(d) Per 8. l. 12.
(e) Per cor. 2. p. 1. l. 12.
(f) Per lem. ante 10 l. 12.
(g) Per poriſ. univ.

De

De cylindris patet theorema, cum ſint tripli conorum.

[Corol. *Si continuetur ratio diametrorum BF, QR quæ ſunt in baſibus conorum (vel cylindrorum) ſimilium, per terminos G, H; ut ſint BF, QR, G, H* ∺; [a]Per def. 10. l. 5. *Erit* (a) *ut BF ad H, ita conus BAF ad conum QZR, & ita cylindrus* BM *ad cylindrum RI.*]

PROPOSITIO XIII.

Fig. 16. S*I cylindrus (BI) ſecetur plano (RL) baſibus (BQ, CI) parallelo; erit pars (BL) ad partem (RI,) ut axis ſegmentum (AO) ad ſegmentum axis (OF.)*

Demonſtratur ut prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

[*Dividatur enim axis* OF *in quotcumque partes æquales, & per ſingula diviſionum puncta ducantur plana baſibus* RL, CI *parallela, & dividetur cylindrus (atque etiam ſuperficies cylindrica)* RI *in partes numero æquales iis in quas dividitur axis* OF; *quarum ſingulæ, æquales ipſius* OF *partes pro axibus habentes, erunt cylindri ejuſdem altitudinis; & proinde* (b) Per 11. l. 12. *cylindri in quos dividitur cylindrus* RI *erunt* (b)*ut baſes, hoc eſt, æquales: (quod autem cylindricæ ſuperficies iſtæ in quas dividitur ſuperficies cylindrica* RI, *ſint etiam æquales, conſtabit ex eo quod una quævis intra alteram quamvis poſita, illi examuſſim congruet: & eodem modo parvulorum cylindrorum æqualitas iterum conſtabit.) Ergo cylindrus (& cylindrica ſuperficies)* RI *dividitur in partes aliquotas ſimiles iis in quas dividitur axis* OF. *Si itaque ex axe OA accipiatur una pars aliquota axis* OF *quoties poterit, & per puncta partes illas ipſius AO connectentia, ducantur plana oppoſitis planis* BQ, RL *perallela; manifeſtum eſt, toties in antecedente AO axe contineri partem aliquotam conſequentis axis* OF, *quoties in antecedente* BL *cylindro (vel ſuperficie cylindrica) continetur pars ſimilis aliquota conſequentis cylindri (vel* (c) Per rationum æqualium iudicium. *ſuperficiei cylindricæ)* RI. *Ergo* (c) *axis AO eſt ad axem* OF, *ut cylindrus* BL *ad cylindrum* RI; *(vel etiam, ut ſuperficies cylindrica* BL *ad ſuperficiem cylindricam* RI.) *Q. E. D.*

Sch. *Hæc propoſitio non minus valet in obliquo cylindro quam in recto: in eo enim caſu, partes aliquotæ axis* OF, *ad baſes ſuas ſimiliter inclinantur in parvulis iſtis cylindris, in quas dividi ſupponitur cylindrus* RI *a planis ad baſes parallelis; unde*

duo

duo quivis intra invicem poſiti congruent, & proinde tam cylindruli quam eorum ſuperficies, partes erunt aliquotæ cylindri & ſuperficiei RI, *partibus aliquotis axis* OF *numero æquales; & proinde ex cylindro vel ſuperficie cylindrica* BL *toties ſumi poſſunt, quoties partes axis* OF *ex axe* OA. *Unde demonſtratio omnino eadem erit in cylindro obliquo ac in recto.*

Corol. *Hinc, ſi cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo; erunt etiam partes* BL, RI *ut earum altitudines. Si enim cylindrus ſit rectus, res patet; altitudines enim ab axis ſegmentis* AO, OF *non ſunt diverſæ: ſi vero fuerit obliquus, ducatur recta linea baſibus perpendicularis, ac manifeſtum eſt illam atque axem a plano baſibus parallelo ſimiliter* (a) *ſecari; & proinde, cum partes* BL, RI *ſint* (b) *ut axis ſegmenta, erunt etiam ut ſegmenta perpendicularis, hoc eſt, ut ſui ipſarum altitudines* Q.E.D.] (a) Per 17. l. 11. (b) Per ſch. hujus pr.

PROPOSITIO XIV.

CYlindri (*CI & AR*) *ſuper baſibus* (*GH, MQ*) *æqualibus, ſunt inter ſe ut altitudines* (*SF, LZ.*) *Idem conis accidit.* *Fig.* 27. & 28.

Abſcinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO, altitudinis LE ejuſdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI (*c*) æquales ſunt. Cum igitur cylindrus AO ſit ad cylindrum AR, ut (*d*) LE ad LZ; etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ; hoc eſt, (quia LE & SF (*e*) æquantur,) ut SF ad LZ. Quod erat demonſtrandum. [c] *Per* 11. *l.* 12. *p. cum ſch.* 10. *l.* 12. (d) *Per coro. præc.* [e] *Per conſtr.*

[*Porro, cum ſit cylindrus* CI *ad cylindrum* AR, *ut* SF *ad* LZ; *erit etiam pars tertia cylindri* CI *ad partem tertiam cylindri* AR, *hoc eſt,* (f) *conus* CFT *ad conum* AZB, *ut* SF *ad* LZ. (f) *Per* 10. *l.* 12. *ejuſque ſchol.* 2.

Obſervent tyrones, hujus propoſitionis demonſtrationem æque valere in cylindris & conis obliquis ac in rectis.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de priſmatis; itemque de pyramidibus; & demonſtratio plane ſimilis. Sed de priſmatis ex coroll. 1. p. 9. l. 12. & p. 25. cum cor. 1. p. 24. l. 11. De pyramidibus ex hoc & ex 7. l. 12.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Fig.28.& 29. *Æquales cylindri (AR , DF) reciprocant baſes & altitudines ; & ſi reciprocant , æquales ſunt. Idem conis accidit.*

Demonſtratur ut P.34. l.11. ſed pro.32.& 25. iſthic citatis, hic adhibebitur prop. 11. & 13. [*vel* 14.] lib. 12.

[1. *Pars. Sint primo cylindri re i : ſi fuerint æque alti ,*
(a) Per 11.l.12. *baſes (propter cylindros ex hypotheſi æquales) erunt* (a) *æ-*
quales ; unde in eo caſu, res patet.

Si vero altitudines fuerint inæquales, a majori LZ *abſcin-*
de LE *minori* QC *æqualem & per* E *duc planum* XO *ad* M
(b) Per eamd. Q *parallelum. Baſis* MQ *eſt ad baſim* VT , (b) *ut cylindrus*
AO *ad cylindrum* FD ; *hoc eſt, (quia cylindri* AR, FD *æqua-*
les eſſe ſupponuntur,) ut cylindrus AO *ad cylindrum* AR ; *hoc*
(c) Per 14.l.12. *eſt,* (c) *ut altitudo* LE *ad altitudinem* LZ; *hoc eſt, (propter*
LE, QC *æquales) reciproce ut altitudo* QC *ad altitudinem*
LZ. Q. E. D.

Sint autem cylindri quovis modo obliqui, & erigantur ſuper
iiſdem baſibus & in eadem altitudine cylindri re i; eruntque
(d) Per 11.l.12. & ſch poſt. 10.l.12. *his æquales* (d) *obliqui. Quare cum æquales cylindri recti*
reciprocent baſes & altitudines ; etiam æquales obliqui reci-
procabunt. Q. E. D.

(e) Per 10.l.12. *Cum vero æquales coni ſint* (e) *æqualium cylindrorum æque*
altorum & ſuper iiſdem baſibus partes tertiæ ; hi etiam baſes
& altitudines reciprocabunt.

2. *Pars. Sint cylindrorum rectorum altitudines inæquales,*
& de majori LZ *ſume minori* QC *æqualem* LE , *& per* E
ducatur planum XO *baſi parallelum. Cylindrus* AO *eſt ad cy-*
(f) Per 10. l.12. *lindrum* FD, (f) *ut* MQ *ad* VT; *hoc eſt per hypoth. ut* QC (g)
(g) Per conſtr. *ſive* LE *ad* LZ; *hoc* (h) *eſt, ut* AO *ad* AR . *Ergo* (i) *cylindri*
(h) Per 14.l.12. AR, FD *ſunt æquales. Et cum cylindri obliqui ſint rectis æ-*
(i) Per 9.l.5. *que altis & ſuper iiſdem baſibus* (k) *æquales ; hi etiam, ſi re-*
(K) Per 11.l.12. & ſch. poſt 10.l.12. *ciprocant baſes & altitudines, æquales erunt.* Q. E. D.

(l) Per 10.l.12. *Coni autem, cum ſint* (l) *tertiæ partes cylindrorum æque al-*
torum ſuper iiſdem baſibus, ſi reciprocant baſes & altitudines,
erunt & ipſi æquales. Q.E.D.]

Scholium.

CUM nihil attulerit Euclides de ratione compoſita in corporibus, eam breviter hoc loco demonſtrabimus.

1.Cy-

Digitized by Google

1. Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma, rationem habent compoſitam ex rationibus baſium & altitudinum.

Sunto cylindri FD & AR: ab altiori AR (nam in æque altis res per ſe patet (a);) abſcinde AO æque altum ac FD. Sit etiam ut baſis VT ad baſim MQ, ita FN ad X; & ut altitudo ND ſeu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur oſtendere, cylindrum FD eſſe ad cylindrum AR, ut FN eſt ad Z. Cylindrus FD eſt ad cylindrum AO, ut (*b*) baſis VT ad baſim MQ; hoc eſt, (*c*) ut FN ad X: cylindrus autem AO eſt ad cylindrum AR, ut (*d*) BO ad BR; hoc eſt, ut (*e*) X ad Z. Igitur ex (*f*) æquo, cylindrus FD eſt ad cylindrum AR, ut FN ad Z.

Fig. 29. & 28.
(a) *Per 11. l. 12.*
(b) *Per 11. l. 12.*
(c) *Per conſtr.*
(d) *Per 14. l. 12.*
(e) *Per conſtr.*
(f) *Per 22. l. 5.*

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur, ſed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2 Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.

Sunt enim (*g*) cylindrorum ac priſmatum partes tertiæ.

Hæc vero omnia in corporibus obliquis æque obtinent ac in rectis, uti ex antedictis ſatis patet.]

(g) *Per 10. & 7. 8. 12.*

PROPOSITIO XVI, XVII.

HÆ *propoſitiones omnium prolixiſſimæ, non alium uſum habent, quam ut demonſtretur* P. 18. *quam nos alia faciliori via demonſtrabimus.*

Lemma ad P. 18.

Fig. 30.

CYlindri hemiſphærio inſcripti, in hemiſphærium deſinunt. Sit PZY maximus hemiſphærii ſemicirculus: ſitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductiſque per diviſionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Iſcribantur ſemicirculo rectangula OBRK, FDHS, quibus deinde extra circulum continuatis, ſemicirculo circumſcripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE; eruntque omnia æque alta. Exceſſus autem circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ ſimul ſumpta conficiunt rectangulum FTYP. Nam quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE ſimul, æqualia rectangulo LB, hoc eſt OR. Quare ſi adiicias utrimque plana FK, TR, erunt ſimul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si autem intelligatur ſemicirculus cum rectangulis circa radium immotum

immotum AZ circumagi, inſcripta rectangula EH, OR producent cylindros hemiſphærio inſcriptos; & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos, ſibi mutuo inſiſtentes: & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcripta rectangula erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis data minor; adeoque etiam ipſe quovis dato (*a*) evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum; multoque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti, tandem deſinunt (*b*) in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex 14. l. 12.*
(b) *Per def. 6. l. 12.*

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur cylindros cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos, in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 31.

SPhærarum proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)

Radiis AB, YR in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas, diviſis, ductiſque per diviſionum puncta perpendicularibus, &c. Intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis inſcripta eſſe rectangula æque multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta, inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æque multos, ſibi invicem inſiſtentes. Quia KC (*c*) eſt ad CF, ut CF ad CB. Erit ratio KC ad CB duplicata (*d*) rationis KC ad CF, hoc eſt rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per conſtr. eſt KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam (*e*) FC eſt ad BC, ut XE ad ER. Sed BC eſt ad CO per conſtr. ut RE ad ES. Igitur ex æquo (*f*) FC eſt ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur (*g*) FL, XQ ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata (*h*) proportionis diamerrorum FI, XV, ſeu ſemidiametrorum FC, XE, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio FC ad XE eadem eſt cum proportione quæ eſt inter diametros ſphæra-

(c) *Per cor. 1. p. 13. l. 6.*
(d) *Per def. 10. l. 5.*
(e) *Per 35. l. 5.*
(f) *Per 22. l. 5.*
(g) *Per def. 4. l. 12.*
(h) *Per 12. l. 12.*

Digitized by Google

ſphærarum BK, RZ; (nam ut jam oſtendi, FC eſt ad XE, ut CO ad ES; hoc eſt, ut (*a*) BK ad RZ, ipſarum CO, ES per conſtr. æque multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonſtravimus ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos, ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio ſimul omnium ad omnes ſimul, (*b*) triplicata eſt rationis diametrorum BK, RZ. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria (*c*) deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit (*d*) rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 15. *l.* 5.
(b) *Per* 12. *l.* 5.
(c) *Per lem. præced.*
(d) *Per. poriſm. univ.*

Corollarium.

NOta igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſcit. Ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. Ut eſt 1. ad 1000, quartum terminum, ita ſphæra minor erit ad majorem.

Conorum, Cylindrorum & Sphæræ dimenſio dabitur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

QUemadmodum ſimiles (*e*) planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas, in proportione data augentur vel diminuuntur.

Data ſit ſphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcumque, cujus radius ſive latus ſit A. Data item ſit proportio quæcumque A ad B, ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & ſimile.

Inter terminos rationis datæ A & B, inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in ſcholio poſt 13. l. 6. Sphæra cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile, factum ſuper latere X, erit duplum dati.

Nam corpora ſimilia quorum radii ſeu latera ſunt A & X, rationem inter ſe habent triplicatam (*f*) rationis A ad X, hoc eſt, eamdem (*g*) quam A habet ad B.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum a Deliaco Apolline dictum eſt, quod is, lue ſæviſſima Athenas populante, conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturā

(e) *Per cor.* 4. *p.* 20. *l.* 6
Fig. 31.
(f) *Per* 8. *& cor.* 2. *p.* 9. *& per* 11. *ac* 12. *l.* 11.
(g) *Per def.* 10. *l.* 5.

Digitized by Google

ſi ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8. *cap.* 12.

Atqui Valerius non iſta, ſed hoc ſolum dicit: [Plato] conductores ſacræ arcis, [*lege* aræ,] de modo & forma ejus ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire juſſit. *Ubi tamen pro* Euclide, Eudoxum *reponendum eſſe monet Menagius ad Diog. Laertii lib.* 2.*ſegm.* 106. *Ceterum accuratiora ſi velis de hujus problematis occaſione, deque methodis idem ſolvendi, ac præcipue de variis modis duas medias proportionales inveniendi, quos excogitarunt antiqui Geometræ, conſule* (*ut alios mittam*) Eratoſthenem de cubi duplicatione, (*inter opera ejus ad calcem Arati Oxon.* 1672. *edita.*) Vitruvium de Architect. *lib.* 9. *cap.* 3. Plutarchum de genio Socratis, (*operum Moral. edit. Francofurt. pag.* 579.) Pappum Collect. Mathemat. *lib.* 3. *prop.* 5. & Eutocium (*a Tacqueto laudatum ſupra, in ſchol. poſt* 13. *l.* 6.) Comment. in Archimed. de ſphæra & Cylindro, *ad Theor.* 1. *lib.* 2.

Porro, inter duos numeros datos invenientur duo medii proportionales hoc modo. Quadratum prioris extremi in poſteriorem ducatur, & producti radix cubica extrahatur. Erit ea duorum mediorum prior. Deinde quadratum poſterioris extremi per extremum priorem multiplicetur, & hujus producti radix cubica exhibebit duorum mediorum poſteriorẽ. Exemp. gr. proponatur invenire duos medios proportionales inter 8. & 27. *Multiplica* (8 × 8 =) 64, *per* 27, & *orietur* 1728, *cujus radix cubica* 12, *eſt duorum mediorum proportionalium prior. Deinde multiplica* (27 × 27 =) 729, *per* 8, & *producetur* 5832, *cujus radix cubica eſt* 18, *nempe duorum mediorum poſterior. Nam* 8, 12, 18, 27 ∺. *Et univerſaliter, ſi inter A & E quærantur duæ mediæ proportionales M & N; erit* M = √c *AqE*, & N √c *EqA*.

(a) Per cor. 2. p. 12. l. 6. *Cum enim rectangulum ſub A & E ſit* (a) *medium proportionale inter illarum quadrata; erunt Aq, AE, Eq* ∺. *Ducantur hæc tria plana in eamdem altitudinem A; & orientur*
[b] Per 32. l. 11. (b) *ſolida continue proportionalia Ac,* (c) *AqE, EqA Ducantur etiam eadem plana in altitudinem communem E, &*
[c] Vide ſch. p. 36. l. 11. *fient ſolida AqE, EqA, Ec* ∺. *Quatuor ergo ſolida, Ac, AqE, EqA, Ec ſunt continue proportionalia; ac proinde eorum radices cubicæ, A,* √c *AqE,* √c *EqA, continue*
[d] Per ſch. 1. p. 33 l. 11. & p 35. l 5. *proportionales* (d) *erunt. Ergo, cum ex hypoth. ſint A, M, N, E* ∺, *erit* M = √c *AqE*, & *N* = √c *EqA*.

Si vero primus terminus fuerit 1, *extracta radice cubica poſterioris extremi, habebitur duorum mediorum prior, cujus medii quadratum erit duorum mediorum poſterior. Si enim*

fuerit

Digitized by Google

fuerit $A = 1$, *erit* $Aq = 1$. *Unde* $AqE = 1 \times E = E$, *&* $\surd$ cAqE (*ſive* M) $= \surd$ cE. *Et eodem modo* $\surd$ cEqA (*ſive* N) $= \surd$ c$Eq =$ (a) $\surd$ c$E \times$ (a) Per cor.
$\surd CE$. *Ex. gr. inter* 1. *&* 125. *medii ſunt* 5. *&* 25. *Eſt* P. 37. l.11.
nempe $\surd$ c$125 = 5$, *&* $5 \times 5 = 25$. *Sunt autem* 1, 5, 25, 125 $\div\!\!\div$: *Ac proinde, ſi pro cubi dati latere ponatur unitas, habebitur latus cubi dato dupli, radicem cubicam numeri binarii extrahendo. Quod (cum per ſe manifeſtum ſit, tum etiam) ex eo deducitur, quod* $\surd$ c2 *ſit duorum mediorum proportionalium prior inter* 1. *&* 2.]

Digitized by Google

Digitized by Google

ANDREÆ
TACQUET
E SOCIETATE JESU
SELECTA EX
ARCHIMEDE
THEOREMATA
Via faciliori ac breviori demonſtrata & novis inventis aucta.



VENETIIS, MDCCXXXVII.
EX TYPOGRAPHIA HERTZIANA.

Digitized by Google



LECTORI.

QUamvis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria, communi quodam conſenſu, Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quam legant; admirantur plures, quam intelligant. Cauſæ, opinor, ſunt exemplarium moles, & raritas; ſermonis ex Greco tranſlati obſcuritas nonnulla; demonſtrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex ſtudioſæ juventutis uſu futurum, ſi elementis jam illuſtratis, hæc a me ſelecta ex Archimede theoremata, & via multo faciliori ac breviori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonſtrando eam tenui, ut ſperem eum qui elementa perceperit, hæc ſummi Geometræ præclariſſima inventa negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adjectis tredecim propoſitionibus, Archimedis de cylindro & ſphæra doctrinam ampliorem facio, atque inter cetera demonſtro ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus, ſphæra, cylindro, & æquilatero cono, utroque ſphæræ circumſcripto, continuari. Va-

ria inſuper ſparſim , inter quæ propoſitio 12. & corollaria prop. 14. præcipua ſunt , & ſcholia omnia adjeci . Fruere iſtis , quiſquis Geometriæ candidatus es ; & quantum ex Euclide profeceris , in Archimede experire . Cumque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te , evehique ſurſum perſenſeris , mentem ab infimis hiſce rebus feliciter jam avulſam attolle etiam altius , atque dirige ad veritatem primam , æternam , immenſam , quæ Deus eſt , cujus ineffabili viſione nos futuros aliquando æternum beatos confido . Vale .

Digitized by Google

THEOREMATA SELECTA
EX ARCHIMEDE.

DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

Eſto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos ſecet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His poſitis *Fig. 26. tab. ex Archimede.*

1. Sector ſphæræ eſt, qui ſectore circulari AECG, ſeu AEBG, circa diametrum BC in orbem acto, producitur.

2. Segmentum ſeu portio ſphæræ eſt, quæ a circulari ſegmento ECG, ſeu EBG, circa eamdem diametrum BC in orbem acto, deſcribitur.

3. Portionis ſphæricæ (EBG) vertex eſt diametri immobilis extremitas B: Baſis eſt circulus a recta EG deſcriptus: Axis eſt diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4. Cum ſphæricæ portionis, aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & cum cylindri ſuperficiem dico, intelligo ſimiliter abſque baſibus; niſi adjungatur (*tota*;) tunc enim accipiuntur & baſes.

Rurſum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

1. Polygoni circulo inſcripti ambitus, minor eſt circuli peripheria. *Fig. 1. & 19.*

2. Polygoni circuli circumſcripti ambitus, circuli peripheria major eſt. *Fig. 2.*

3. Quod ſi polygonum circulo inſcriptum, circa diametrum (AE) una cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti ſuperficies, minor ſphæræ ſuperficie. Et, ſi polygonum circulo circumſcriptum, circa diametrum *Fig. 19.*

una

una cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti major ſuperficies, ſuperficie ſphæræ.

Fig. 17. 4 Similiter, ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari (DAF,) minor eſt peripheria ſegmenti (DAF.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum una cum ſegmento, circa ſegmenti axem AO circumagatur; erit corporis a polygono geniti ſuperficies, minor ſuperficie portionis ſphæricæ (CAF.)

Fig. 6. & 8. 5. Superficies priſmatis cylindro inſcripti, minor eſt cylindri ſuperficie; circumſcripti vero major.

Fig. 7. & 10. 6. Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ, minor eſt coni ſuperficie; circumſcriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

Data ſint figuræ quæcumque ſeu planæ ſeu ſolidæ, A, B: Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B ſemper minus ac minus excedendo, in ipſas (a) *deſinant, & tamen ſemper inter ſe æquales ſint.*

(a) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras A & B æquales eſſe.

E. F.
A. B. X.

Si non, alterutra major erit. Sit ergo A major quam B exceſſu X. Per hypotheſim dantur magnitudines E, F inter ſe æquales, quæ excedant figuras A, B exceſſu minori quam X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quam A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quam A; quod eſt abſurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo oſtendam B non poſſe eſſe majorem quam A. Ergo cum neutra ſit major altera, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Data ſint figuræ A & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ a figuris datis ſemper minus ac minus deficiendo, in ipſas (b) *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint:*

(b) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z. Si

A. B. Z. Si non, alterutra minor erit. Eſto igi-
O. P. tur A minor quam B defectu Z. Per hy-
potheſim dari poſſunt magnitudines O, P inter ſe æquales, quæ deficiant a figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere a B. Ergo P major eſt quam A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quam A, quod repugnat hypotheſi, qua ſtatuitur O minor quam A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quam A. Quare cum neutra ſit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

[*Hæ vero propoſitiones duæ, ex poriſmate univerſali (poſt pr. 2. lib. 12.) abſque ulteriori demonſtratione, immediate deduci poſſent.*]

PROPOSITIO III.

A*Mbitus polygonorum circulo circumſcriptorum & inſcriptorum, deſinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipſa in circulum deſinunt.*

Si nimirum arcubus ſine fine biſectis, plura ſemper ac plura latera circulo circumſcribantur & inſcribantur. *Fig. 1. tab. 6. ex Archim.*

1. Pars. Intelligantur circulo inſcripta & circumſcripta, polygona ordinata [*ſimilia*;] ſive ut traditur p. 12. l. 4. ſive ut in hac figura, perinde erit. Manifeſtum eſt *(a)* FI eſſe ad CE, (hoc eſt, (*b*) totum ambitum circumſcriptum eſſe ad totum ambitum inſcriptum,) ut IA eſt ad CA. Atqui IC exceſſus rectæ IA ſupra CA, fit tandem quacumque data minor, ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circumſcribi & inſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſſus ambitus circumſcripti ſupra ambitum inſcriptum, tandem fiet quovis dato minor. Ergo multo (*c*) magis exceſſus ambitus circumſcripti ſupra peripheriam fiet quocumque dato minor. Similiter, quia jam oſtendi defectum ambitus inſcripti ab ambitu circumſcripto fieri quovis dato minorem, multo (*d*) magis defectus inſcripti ambitus a peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inſcripti quam conſcripti, in peripheriam (*e*) deſinunt. Quod erat primum. Hæc ulterius demonſtrare operæ pretium non eſt, cum ſatis ſint manifeſta.

(a) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*
(b) *Per 12. l. 5.*
(c) *Patet ex axio. 1.*
(d) *Patet ex axio. 2.*
(e) *Per def. 6. l. 12.*

Digitized by Google

2. Pars. Quia jam oſtenſum eſt exceſſum lateris FI ſupra latus EC fieri tandem quovis dato minorem; (eſt enim FI ad EC, ut IA ad CA;) etiam exceſſus quadrati FI ſupra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita (*a*) polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum; Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus a circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inſcripta quam circumſcripta, in circulum (*b*) deſinunt. Quod erat alterum.

[a) *Per* 20. *l.*6. *& ſch. ei annexum.*

(b] *Per def. l.* 12.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1. (c) *Vide def.*3.*l.* 4.

P*Olygonum* (c) *ordinatum circulo conſcriptum* (FINTR) *æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo vero circuli radius;*

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt poligoni inſcripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) *in latus unum ex centro ducta.*

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus, (*d*) eſt perpendicularis ad tangentem IF. Quare ſi, ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum reſolvatur in triangula; erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parem ſummæ laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem vero AB, æquabitur illis (*e*) omnibus, hoc eſt, toti polygono circumſcripto.

(d) *Per* 18. *l.*3.

e) *Patet ex* 1. *l.* 6.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.

[*Nam propter æqualia inſcripti latera, perpendiculares omnes a centro A æquales* (f) *erunt, & proinde omnia triangula in quæ reſolvitur inſcriptum polygonum,* (g) *æqualia ſunt. Unde eodem prorſus modo procedet demonſtratio ac in parte priori.*

[f) *Per* 14. *l.*3.

[g) *Per* 38. *l.*1.

Cor. 1. *Hinc area polygoni ordinati circulo inſcripti vel circumſcripti invenitur,* (h) *multiplicando perpendiculum a centro ad latus quodvis ductum, in dimidiam polygoni circumferentiam.*

(h) *Per hanc & ſchol.p.*41. *l.*1.

Cor.

Digitized by Google

Cor. 2. *Et cum polygona circulo inſcripta ac circumſcripta, in circulum, & polygonorum ambitus in circuli ambitum tandem* (a) *deſinant; etiam area circuli invenietur, multiplicando radium in dimidiam ejuſdem peripheriam.* (a) *Per præc.*

Cor. 3. *Circulus ergo æqualis erit triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter. Exurgit* (b) *enim area trianguli ex dimidia baſi in altitudinem ducta. Et eodem modo conſtabit, ſectorem circuli æqualem eſſe triangulo, cujus altitudo eſt circuli radius, & cujus baſis eſt recta quæ arcui ſectoris æqualis ſit: Hoc autem corol. ex iiſdem principiis latius demonſtratur in prop. ſeq.* (b) *Per ſch. p.41. l.1.*

Cor. 4. *Figurarum iſoperimetrarum capaciſſima eſt circulus. Eſto perimeter polygoni cujuſcumque [e. gr. quadrati] EGHI æqualis circumferentiæ circuli cujus radius ſit AF, & cujus centrum F coincidat cum centro circuli qui quadrato EGHI inſcribi, vel circumſcribi poſſit. Dico quod circuli area major eſt quam area polygoni. Area enim circuli æqualis* (c) *eſt triangulo cujus baſis eſt circumferentia, altitudo vero ſemidiameter FA: & Area polygoni æqualis* (d) *triangulo cujus baſis eſt perimeter polygoni, circumferentiæ circuli ex hypotheſi æqualis, & altitudo perpendicularis FO a centro in latus polygoni demiſſa: quæ quidem cum radio circuli ſemper ſit minor, liquet aream polygoni area circuli eſſe minorem. Q. E D.* Fig. 2. (c) *Per cor. 3.* (d) *Per hanc prop.*

Et ſimiliter inter figuras ſolidas æqualibus ſuperficiebus contentas, Sphæra omnium capaciſſima demonſtrabitur.

PROPOSITIO V.

Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter. Fig. 3.

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem vero radium circuli, ſemper ſunt (*e*) æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum, circumſcripta, in circulum (*f*) deſinunt: ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam) quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine vero radium AB. tandem deſinunt in triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. Ergo (*g*) circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium AB, æqualia ſunt. (*e*) *Per præc.* [*f*] *Per 2. hujus.* (*g*) *Per 1. hujus.*

Quod autem triangula ſub ambitu polygoni & radio, deſinunt in triangulum ſub peripheria & radio, ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni & radio AB

ſunt

(a) Per 1. l.6. ſunt ad triangulum ſub peripheria & radio AB, ut (a) baſis ad baſim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam; cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in (b) Per 3. hujus. peripheriam (b) deſinit. Ergo & triangula deſinent in triangulum.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l. 1. [*vel potius, ex hac & cor. p. 42. l. 1.*] patet rectangulum ſub radio & dimidia circumferentia;[*ſive ſub diametro & circumferentiæ quadrante; ſeu denique, ſub quarta parte diametri & circumferentia*]eſſe æquale circulo: ſub radio & tota circumferentia, [*ſive ſub diametro & dimidia circumferentia*] eſſe [*circuli*]duplum: ſub tota diametro & tota circumferentia eſſe quadruplum circuli.

Fig. 9. l. 4. 2. Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum, ut circumferentia dimidia (CDE)ad diametrum;ad quadratum vero circumſcriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum, [*ſive ut circumferentia dimidia ad diametri duplum; & ad radii quadratum, ut circumferentia ad diametrum.*]

(c) Per cor. 1. Nam rectangulum ſub [*dimidia circumferentia*] CDE & radio CA ſeu CF, (hoc (c) eſt, ipſe circulus,) eſt ad rectangulum GFCE, nimirum ſub FG & CF, (hoc (d) eſt, ad quadratum inſcriptum BCDE,) ut (e) CDE dimidia circumferentia eſt ad FG ſeu CE diametrum; quod erat primum. Ac proinde circulus eſt ad duplum rectanguli GFCE, (hoc eſt, ad FH quadratum circumſcriptum,) ut [*circumferentia dimidia*] CDE ad duplam diametrum CE;[*quod erat ſecundum. Adeoque circulus eſt ad quartam partem quadrati circumſcripti, hoc eſt, ad radii quadratum, ut dimidia circumferentia ad ſemidiametrum, ſive ut circumferentia ad diametrum; quod erat tertium.*]

(d) Per ſch. poſt pr 6. & 7. l. 4. (e) Per 1. l. 6.

3. Ex corollario primo, quadrantis ope; mechanice habebitur rectangulum vel quadratum æquale circulo ejuſdem cum quadrante radii; atque inde, circuli cujuſvis quadratura mechanice obtinebitur. Rectangulum enim (f) *ſub quadrantis arcu & duplo radio; adeoque & quadratum* (g) *mediæ proportionalis inter arcum & duplum radium, circulo ejuſdem cum quadrante radii exæquabitur. Atque inde, dato cuivis alteri circulo æquale rectangulum vel quadratum invenietur per cor. 7. p. 2. l. 12.*

(f) Per cor. 1. [g] Per 13. & 17. l. 6.

Mechanice vero habebitur linea recta, dati quadrantis arcui æqualis, filum vel chartam ad arcum illum applicando; vel etiam arcum ſuper plano, ſecundum regulæ vel lineæ rectæ directionem volvendo,]

PRO-

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minus quam ter & unam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{70}$,) plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus theorematis demonſtrationem, aſſumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum, utrumque 96. laterum. Deinde oſtendit 96. latera circulo circumſcripta continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. ac proinde circumferentiam quæ ipſis minor eſt, etiam continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96. circumferentiæ inſcripta, (ac proinde & circumferentiam, quæ ipſis major eſt,) amplius continere diametrum quam ter & $\frac{10}{71}$. Porro longior eſt hujus rei demonſtratio quam ut hoc loco adferri debeat.

[*At tanti momenti theorema, cui demonſtrando Archimedes ipſe librum integrum impendit, ut indemonſtratum prorſus tyronibus obtrudatur, a meipſo impetrare nequeo. En igitur ejuſce demonſtrationem Archimedeam, quam Magni Barrovii veſtigiis præcipue inſiſtendo, hic deſcripſi.*

Pars prima. Circuli cujuſcumque perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate minori quam $\frac{1}{7}$ parte ejuſdem diametri. Fig. 4.

Eſt C centrum circuli, & AD (radio AC æqualis,) (a) *latus hexagoni circulo inſcriptibilis, & juncta CD, erit* (b) *angulus ACD ſexta pars rectorum quatuor. Angulus ACD biſecetur recta CE, quæ etiam & biſecabit AD in S, eique perpendicularis erit. Producatur CE donec occurrat rectæ EA tangenti circulum in A; & continua angulorum ad C biſectione, ducantur ad tangentem rectæ CF, CG, CH, CK, ut ſit ang. ACD = 2 ang. AC = 4 ang. ACF = 8 ang. ACG = 16 ang. ACH = 32 ang. ACK. Erit itaque angulus ACH, (ſive 2 ang. ACK) $\frac{1}{96}$ (pars nonageſima ſexta) rectorum quatuor. Et ſi in tangente producta capiatur AL = AK, & jungatur CL, erit* (d) *angulus ACL angulo ACK æqualis; & proinde, angulus LCK anguli ACK duplus erit, ſive æqualis angulo ACH, ſeu $\frac{1}{96}$ rectorum quatuor, & LK erit latus figuræ ordinatæ 96 laterum circulo circum-*

[a] Per cor. 1. pr. 15. l. 4.
(b) Per 26. l. 3. & cor. 1. ſ. 13. l. 6.
(c) Per n 3. ſch. p. 26 l. 1.
(d) Per 4. l. 1.

cumſcriptibilis, cujus proinde ambitus erit 69 LK, circuli circumferentia (a) major. Si itaque oſtendatur 96 LK minorem eſſe quam $3\frac{1}{7}$ diametri AB; Ergo etiam circuli perimeter minor erit quam $3\frac{1}{7}$ ejuſdem diametri.

Ob triangula ſimilia (b) CEA, CAS, erit CE : EA :: CA : AS. Sed CA = (c) 2 AS; ergo CE = 2 EA. Et ob angulum ACE biſectum recta CF, (d) erit EC : CA :: EF : FA; & compon. EC + CA : CA :: EA : FA; & permut. EC + CA : EA :: CA : FA. Et eodem modo oſtendetur eſſe FC + CA : FA :: CA : GA; & GC + CA : GA :: CA : HA; & denique HC + CA : HA :: CA : KA.

Ponatur EC = 306: erit ECq = 93636, & EA (e) erit = 153, unde EAq = 23409, & CAq (= ECq (f) — EAq = 93636 — 23409) = 70227. Sed √ 70225 = 265. Ergo CA major eſt quam 265, & EC + CA major quam (306 + 265 =) 571. Et cum ſit EC + CA : EA :: CA : FA, ſitque ratio EC + CA ad EA (g) major ratione 571 ad 153, erit (h) etiam ratio CA ad FA major ratione 571 ad 153, hoc eſt, (utrumque numerum multiplicando per 8,) ratione 4568 ad 1224. Si itaque ponatur FA = 1224, erit (i) CA major quam 4568.

Ponatur igitur FA = 1224, eritque FAq = 1498176: Et cum CA major ſit quam 4568, erit CAq majus quam 20866624, adeoque CFq (= (k) FAq + ACq) majus erit quam 1498176 + 20866624, hoc eſt, quam 22364800. Sed √ 22363441 = 4729. Ergo FC major eſt quam 4729, & FC + CA major quam 4729 + 4568, hoc eſt, quam 9297. Et cum ſit FC + CA : FA :: CA : GA, ſitque ratio FC + CA ad FA, major rationr 9297 ad 1224, erit etiam ratio CA ad GA major ratione 9 97 ad 1224. Si itaque ponatur GA = 1224, erit CA major quam 9297.

Ponatur igitur GA = 1224, eritque GAq = 1498176: Et cum CA major ſit quam 9297, erit CAq majus quam 86434209, adeoque CGq = GAq + ACq) majus erit quam 1498176 + 86434209, hoc eſt, majus quam 87932385. Sed √ 87918129 = 9377. Ergo CG major eſt quam 9377, & GC + CA major eſt quam 9377 + 9297, ſive major quam 18674. Et cum ſit GC + CA : GA :: CA : HA, ſitque ratio GC + CA ad GA major ratione 18674 ad 1224, ſive (utrumque dimidiando) ratione 9337 ad 612; erit etiam ratio CA ad HA major ratione 9337 ad 612. Si ita ponatur HA = 612, erit CA major quam 9337.

Ponatur igitur HA = 612, eritque HAq = 374544 Et cum CA major ſit quam 9337, erit CAq majus quam 87179569, adeo-

(a) Per axio. 2. hujus.
(b) Per 8. l. 6.
(c) Prius.
(d) Per 3. l. 6.
(e) Prius.
(f) Per prob. 2. poſt. p. 47. l. 1.
(g) Per 8. l. 5.
(h) per ſch. p. 11 l. 5.
(i) Per 10. l. 5. cum ſchol. p. 7 l. 5.
(K) Per 47. l. 1.

adeoque CHq ($= HAq + ACq$) *majus quam* 374544 + 87179569, *hoc eſt, majus quam* 87554113. *Sed* $\sqrt{87553409} = 9357$. *Ergo* CH *major eſt quam* 9357, & $HC + 3AC$ *major erit quam* 9357 + 9337, *hoc eſt, major quam* 18694. *Et cum ſit* $HC + CA : HA :: CA : KA$; *ſitque ratio* $HC + CA$ *ad* HA *major ratione* 18694 *ad* 612, *ſive* (*utramque dimidiando*) *ratione* 9347 *ad* 306; *erit etiam ratio* CA *ad* KA *major ratione* 9347 *ad* 306. *Si itaque ponatur* $2AK$ *ſive* $LK = 306$, *erit* $2AC$ *ſive* AB *major quam* 9347, & *ratio* AB *ad* 9347 *major erit ratione* LK *ad* 306; & *proinde, ratio* $3\frac{1}{7}AB$ *ad* ($3\frac{1}{7} \times 9347 =$) $29376\frac{2}{7}$, *major erit* (a) *ratione* $96LK$ *ad* ($96 \times 306 =$) 29376. *Hæc autem ultima eſt ratio æqualitatis, cum ſit* $96LK = 29376$. *Ergo* $3\frac{1}{7}AB$ *major eſt quam* $29376\frac{2}{7}$; & *proinde adhuc major quam* 29376, *ſive quam* $96LK$. *Ambitus ergo polygoni ordinati 96 laterum circulo circumſcripti, & multo magis perimeter circuli cui circumſcribitur polygonum illud, minor eſt quam* $3\frac{1}{7}$ *diametri ejuſdem circuli.* Q.E.D. (a) *Per 11. l. 5.*

Pars ſecunda. Circuli perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate majori quam $\frac{10}{71}$ partibus ejuſdem diametri. *Fig. 5.*

Eſto arcus AD *ſexta pars totius circumferentiæ circularis, & continua biſectione fiat arc.* $AD = 2.$ *arc.* $AE = 4$ *arc.* $AF = 8$ *arc.* $AG = 16.$ *arc.* AH; & *erit arcus* AH $\frac{1}{96}$ *totius circumferentiæ. Ducantur rectæ* BD, BE, BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG, AH; *erit* AH *latus figuræ ordinatæ 96 laterum circulo inſcriptibilis, cujus proinde ambitus,* $96AH$. *erit circuli circumferentia* (b) *minor. Secent rectæ* AD, BE *ſe invicem in* K, & *propter angulos* EBA, EAD *æqualibus arcubus inſiſtentes, & proinde* (c) *æquales, & angulum ad* E *communem, triangula* ABE, KAE (d) *erunt ſimilia, & proinde* $AB : AK :: BE : EA$. *Et in triangulo* ABD, *ob angulum* B (e) *biſectum recta* BK, *erit* (f) $DB : BA :: DK : KA$; & *compon.* $DB + BA : BA :: DA : KA$: & *permut.* $DB + BA : DA :: BA : AK ::$ (*prius*) $BE : EA$. *Et pari ratiocinio oſtendetur eſſe* $EB + BA : EA :: BF : FA$; & $FB + BA : FA :: BG : GA$; & $GB + BA : GA :: BH : HA$.

[b] *Per axio. 1. hujus.*
(c) *Per 29. l. 3.*
(d) *Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.*
[e] *Per 29. l. 3.*
(f) *Per 3. l. 6.*

Ponatur jam $BA = 1560$, *eritque* $BAq = 2433600$, & DA ($=$ *radio* (g) AC) $= 780$; *unde* $DAq = 608400$, & DBq ($I = BAq - DAq$) $= 1825200$. *Sed* $\sqrt{1825201} = 1351$. (g) *Per cor. 1. p 15. l. 4.*

5

Ergo

Digitized by Google

Ergo DB *minor eſt quam* 1351, & DB + BA *minor quam* (1351 + 1560 =) 2911. *Quare ratio* 2911 *ad* 780, *hoc eſt*, (*utrumque numerum per* 100 *multiplicando*,) *ratio* 291100 *ad* 78000, *major eſt ratione* DB + BA *ad* DA, *ſive* BE *ad* EA. *Si itaque ponatur* EA = 78000, *erit* BE *minor quam* 291100.

Ponatur igitur EA = 78000, *eritque* EAq = 6084000000. *Et cum ſit* BE *minor quam* 291100, *erit* BEq *minus quam* 84739210000, & BAq (= BEq + BAq) *minus quam* 90823210000. *Sed* $\sqrt{}$ 90826890625 = 301375. *Ergo* BA *minor eſt quam* 301375, & EB + BA *minor quam* (291100 + 301375 =) 592475. *Quare ratio* 592475 *ad* 78000, *hoc eſt*, (*utrumque numerum dividendo per* 325, & *quotos inde ortos per* 11 *multiplicando*,) *ratio* 20053 *ad* 2640, *ratione* EB + BA *ad* EA, *ſive* BF *ad* FA *major erit*. *Si itaque ponanur* FA = 2640, *erit* BF *minor quam* 20053.

Ponatur igitur FA = 2640, *eritque* FAq = 6969600. *Et cum* BF *minor ſit quam* 20053, *erit* BFq *minus quam* 402122809, & BAq (= BFq + FAq) *minus quam* 409092409. *Sed* $\sqrt{}$ 409131529 = 20227. *Ergo* BA *minor eſt quam* 20227, & FB + BA *minor quam* 40280. *Quare ratio* 40280 *ad* 2640, *hoc eſt*, (*utrumque dividendo per* 40, & *quotos inde ortos multiplicando per* 6,) *ratio* 6042 *ad* 396 *major eſt ratione* FB + BA *ad* FA, *ſive* BG *ad* GA. *Si itaque ponatur* GA = 396, *erit* BG *minor quam* 6042.

Ponatur igitur GA = 396, *eritque* GAq = 156816. *Et cum* BG *ſit minor quam* 6042, *erit* BGq *minus quam* 36505764, & BAq (= BGq + GAq) *minus quam* 36662580. *Sed* $\sqrt{}$ 36663025 = 6055. *Ergo* BA *minor eſt quam* 6055, & GB + BA *minor quam* 12097. *Quare ratio* 12097 *ad* 396, *hoc eſt*, *utrumque duplicando*,) *ratio* 24194 *ad* 792 *major eſt ratione* GB + BA *ad* GA, *ſive ratione* BH *ad* HA. *Si itaque ponatur* HA = 792, *erit* BH *minor quam* 24194.

Ponatur igitur HA = 792, *eritque* HAq = 627264. *Et cum* BH *minor ſit quam* 24194, *erit* BHq *minus quam* 585349636, & BAq (= BHq + HAq) *minus quam* 585976900. *Sed* $\sqrt{}$ 585978849 = 24207. *Ergo* BA *minor eſt quam* 24207, & *ratio* AH *ad* AB *major erit ratione* 792 *ad* 24207, *ſive* (*utrumque dividendo per* 3,) *major ratione* 264 *ad* 8069; & *proinde ratio* 96 AH *ad* AB *major erit ratione* (96 × 264 =) 25344 *ad* 8069. *Et quoniam* (25344, *ſive*) 25344 × 1 *ſuperat* (25343 $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{23}$, *ſive*) 8069 × 3 [illegible] *erit*

(a) *ra-*

(a) *ratio* 25344 *ad* 8069 *major ratione* $3\frac{10}{71}$ *ad* 1, *ac* (b) *proinde ratio* 96 *AH ad AB major eſt ratione* $3\frac{10}{71}$ *ad* 1. *Ergo* (c) *factum extremorum majus erit facto mediorum, hoc eſt,* 96 *AH ſive ambitus polygoni circulo inſcripti, & proinde circuli circumferentia cui inſcribitur, major erit quam* $3\frac{10}{71}$ *diametri AB. Q.E.D.*

(a) Per cor. 7. p. 16. l. 6. (b) Per ſch. p. 11. l. 5. [c] Per cor. 6. p. 16 l. 6.

Quod ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam ſtatutos arctare poterimus magis magiſque ſine termino, atque ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Præſtitum eſt hoc a Ludolpho a Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque.

[*Cum autem tangens graduum* 36 *in* 10 *ducta, det pentagoni* circumſcripti; & *ſinus graduum* 36 *in* 10 *ductus, det pentagoni* inſcripti *perimetrum: Cum etiam conſimiliter, tangens gradus dimidii in* 720 *ducta, polygoni laterum* 360 circumſcripti, & *ſinus gradus dimidii in* 720 *ductus, poligoni laterum* 360 inſcripti *perimetrum exhibeat; atque ita porro in infinitum; Obſcurum eſſe nequit quo pacto e datis jam ſinuum atque tangentium tabulis, numeri ſequentes inveniri poterunt.*] Vide Fig. 1.

Proportiones præcipuas hactenus inventas hic ſubjicio.

Prima eſt Archimedis, hujuſmodi:

Diameter 7.

Circumf. 22. major vera.

Diameter 71.

Circumf. 223. minor vera.

[*Nam* $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$, & $\frac{223}{71} = 3\frac{10}{71}$].

Rationes 22. ad 7, & 223. ad 71, ſi ad commune conſequens reducantur, quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eumdem denominatorem;) rationes orientur 1562. ad 497. & 1561. ad 497.

Poſita igitur diametro partium 497,
erit circumferentia major vera 1562.
& circumferentia minor vera 1561.

Utraque igitur a vera differt quantitate minori, quam ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri.

Quod ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens; provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſita igitur circumferentia partium 4906.
erit diameter minor vera 1561.
diameter major vera 1562.

Utraque igitur a vera diametro differt quantitate minori, quam ſit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita a Metio eſt Archimedea multo accuratior. Juxta hanc eſt

Diameter 113.
Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes, nulla veræ propinquior: ex hac enim, poſita diametro 10, 000, 000, provenit circumferentia 31, 415, 929, quæ a vera ſolum penes notam primam 9 differt exceſſu paulo majore, quam ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utraque multo exactior eſt gemina illa Ludolphi a Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris vero notis 36.

Diameter
100, 000000, 000000, 000000.
Circumf. major vera.
314, 1592265, 358979, 323847.
Circumf. minor vera
314, 159265, 358979, 323846.

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri, denominata a numero, qui conſtat unitate & 20 cifris; ac proinde tam hæc quam illa a vera circumferentia differt minori quantitate quam ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima.

Diameter
100000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000.
Circumf. major vera
314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950289.
Circumf. minor vera.
314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288.

Differentia utriſque circumferentiæ, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula una denominata a numero, qui conſtat unitate & 35. cifris, quæ particula ad diametrum, minorem habet proportionem, quam arenula una ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales diametro.

Fruſtra igitur ſit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, ſi ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

[*Poſita*

[*Poſità vero Circumferentia partium*
1, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000,
Diameter erit quam proxime, partium
0, 318309, 886183, 790671, 537767, 926745, 028724.

Corol. 1. *Cum in numeris minus accuratis, ſit circuli circumferentia ad diametrum ut* 22 *ad* 7; *erit circulus in ejuſmodi numeris ad quadratum inſcriptum, ut* 11 *ad* 7; *ad quadratum circumſcriptum ut* 11 *ad* 14; *& ad radii quadr. ut* 22 *ad* 7. *Sequuntur hæc ex cor.* 2. *prop. præced.*

Cor. 2. *Cum vero, in numeris accuratioribus, circuli circumferentia ſit ad diametrum, ut* 355 *ad* 113; *erit in iiſdem numeris, circulus ad quadratum inſcriptum ut* 355 *ad* 226; *ad quadratum circumſcriptum ut* 355 *ad* 452; *& ad radii quadratum ut* 355 *ad* 113.

Cor. 3. *Si autem pro circumferentia ponatur unitas cum quinque ciſris annexis; erit circulus ad quadratum inſcriptum ut* 100000. *ad* 63662; *ad quadratum circumſcriptum ut* 100000 *ad* 127324; *& ad radii quadratum ut* 100000 *ad* 31831 *circiter.*

Cor. 4. *Si denique pro diametro ponatur unitas cum quinque ciſris annexis; erit circulus ad quadratum inſcriptum ut* 157080 *ad* 100000; *ad quadratum circumſcriptum ut* 78540 *ad* 100000; *& ad radii quadratum ut* 314159 *ad* 100000 *fere.*

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii; ſunt hi qui ſequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentia.

MAiorem terminum unius e proportionibus jam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæſita diameter.

Ut ſi detur circumferentia maximi circuli terræ, milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter; ſic ſtabunt termini:

355 : 113 :: 8640 :

multiplica jam ſecundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica $2750\frac{1}{7}\frac{}{1}$ pro diametro orbis terræ.

[*Errare videtur noſter, circumferentiæ terreſtri milliaria Belgica* 8640 *tribuendo. Ex dimenſione Snellii, ambitus terræ*

 mil-

milliaria Belgica 6840 continet, uti apud Varenium videre eſt; pro quibus Tacquetus 8640 milliaria poſuit; numerum centenarium & millenarium ex incuria tranſponendo. Ex vero igitur numero Snelliano, tyronibus exercitationis ergo, computum de novo inſtituendi præbetur occaſio.]

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius e proportionibus ſupra traditis ſtatuatur primo loco, major ſecundo, diameter nota tertio: His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{1}{7}\frac{4}{1}$. & quæratur ambitus; termini ita ſtabunt.

$$113 : 355 :: 2750\frac{3}{7}\frac{4}{1} :$$

Tunc ſecundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. pro ambitu orbis terræ.

Quam modice hæc circumferentia veram excedat, dictum eſt ſupra, exceſſu videlicet paulo majore, quam ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt, 9 circiter aut 10. pedibus Rhynlandicis, quorum 18000. conſtituunt milliare horarium. Quod ſi utamur proportione Ludolphina etiam priori, cujus termini conſtant 21 notis; invenietur circumferentia inſenſibiliter a vera differens, non ſolum diametro data milliariorum Belgicorum 2750. qualis eſt terræ; verum etiam, licet diameter ponatur centum millionum eorumdem milliariorum, qualis fortaſſe eſt diameter firmamenti. Hac enim poſita, proveniet circumferentia minori quantitate a vera differens, quam una centimillioneſima particula pedis Rhynlandici. Quod ſi, ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ, utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum veræ majoris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non eſt igitur adhibenda Archimedea proportio, niſi in quantitate parva: imo ſemper expediet Metiana uti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.

Circuli dimenſio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus.

Ut

Ut ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375. multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5, 940000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ a vera habetur, ſi diferentia inventæ circumferentiæ dimidiæ a dimidia vera, ducatur in ſemidiametrum datam; aut ſi differentia ſemidiametri inventæ a vera, ducatur in datam ſemicircumferentiam.

[Dimenſio ſectoris circularis AEBG (vel AECG,) ex datis radio circuli AE, & arcu ſectoris EBG (vel ECG.) *Fig.* 16.

F*Iat, ut 113 ad 355, ita (a) ſemidiameter data ad ſemicircumferentiam circuli: deinde, ut gradus* 360 *ad gradus arcus dati, ita* (b) *ſemicircumferentia jam inventa, ad arcus ſectoris dimidium* FB, (*vel* FC;) *quo in radium datum ducto,* (c) *exorietur area ſectoris quæſiti.*

(a) Per 15. l. 5.
(b) Per eamd.
(c) Per cor. 3. p. 4. hujus, & ſchol. p. 41. l. 1.

Et, ſi area trianguli rectilinei AEG, *ſectori majori* AEBG *addatur, vel a minore* AECG *ſubducatur;*) *habebitur circuli ſegmentum majus* EDGB, (*vel minus* EDGC.) *Area vero iſtius trianguli* (d) *eſt rectang.* AD × DE. *Eſt autem* ED (e) *ſinus, &* AD *coſinus arcus* EB (*vel* EC.) *Ex datis itaque ſegmenti arcu* EBG (*vel* ECG) *& baſi* EG; *vel ex datis radio* EA *& baſi* EG; *vel denique ex radio* EA *& arcu* EBG (*vel* ECG;) *invenientur* ED *&* DA, *atque adeo area trianguli* EAG. *Verum hæc potius e trigonometria petenda ſunt.*]

(d) Per def. p. 41 l. 1.
(e) Per def. 10. l. 3. & cor. 1. p. 3. l. 3.

Dimenſio Cylindrorum & Conorum.

EAM hic appono, quod a circuli dimenſione pendeat. Cylindrus igitur & priſma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per baſim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in baſim ducta; ſunt enim partes tertiæ cylindrorum, ac priſmatum, eamdem cum ipſis baſim & altitudinem habentium, per 10. & 7. l. 12.

Sit baſis Cylindri aut coni 50. ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50, proveniunt 5000. pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50, proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro ſoliditate coni.

Fig. 14. [Dimenſio Coni truncati NQRO ; ex datis baſibus parallelis ZZ, SS, & altitudine VD.

AD hoc problema ſolvendum, lemma ſequens præmittatur: Ut eſt differentia radiorum qui ſunt in baſibus, (NV — QD,) ad radium minorem (QD ; ita eſt altitudo coni truncati (VD,) ad altitudinem partis deficientis (DP.) *Ducta enim in triangulo NVP, recta DI ad PN parallela, erit* (a) *VI* : *IN* : : *VD* : *DP*. *Sed propter parallelogrammum NIDQ*, (b) *eſt IN* = *QD*, *& proinde VI* = *NV* — *QD. Ergo liquet propoſitum.*

(a) *Per* 2. *l.* 6.
(b) *Per* 34. *l.* 1.

Datis itaque tribus prioribus, invenietur quarta DP, altitudo nempe partis deficientis QPR, cujus altitudinis pars tertia in baſim SS ducta, dabit partem illam deficientem QPR. Deinde pars tertia rectarum PD + DV, ſive altitudinis coni completi, ducta in baſim ZZ, dabit conum completum NPO; a quo ſi ſubducatur pars deficiens QPR, relinquetur conus truncatus NQRO.

Porro notandum eſt, hanc demonſtrationem non minus in coni truncati ſcaleni, quam in recti dimenſione valituram, uti ex iis quæ de pyramidis truncatæ dimenſione in libro elementorum duodecimo ſcripſimus, ſatis patet,]

PROPOSITIO VII.

Fig. 6. *&* 7. *l.* 12.

CIrculorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri, [ſive radii.]

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper ut (*c*) diametri AF & IC. Sed hi (*d*) ambitus in peripherias deſinunt. Ergo etiam peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri. Quod erat demonſtrandum.

(c) *Per cor.* 1. *p.* 1. *l.* 12.
(d) *Per* 3. *hujus.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. 6. *Archimed.*

SUperficies priſmatis cylindro tam circumſcripti quam inſcripti, æquatur rectangulo, cujus altitudo eſt latus cylindri, baſis vero æqualis perimetro baſi priſmaticæ.

1. Pars

Digitized by Google

1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundum lineas EA, NF, &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta (*a*) ſunt, ac proinde etiam (*b*) recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt vero & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur (*c*) rectangulo ſub ambitu baſis priſmaticæ, priſmatis ſeu cylindri latere contento.

(a) *Per def. 3. l. 12. & p. 8. l. 11.*
(b) *Per def. 3. l. 11.*
(c) *Patet ex 1. l. 6.*

2. Eadem eſt ratio ſecundæ partis. Nam latus cylindri [*BD, vel IK, vel QP, &c.*] communis rurſum eſt altitudo rectangulorum BDIK, KIQP, &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

PROPOSITIO IX.

Pyramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (FHLD,) *altitudo autem latus coni* (BG.) *Fig. 7.*

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo; cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (BO) *à vertice in latus baſeos deducta.*

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ BG, BK, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA (*d*) rectus eſt baſis plano FKD, etiam planum (*e*) GBA plano FKD rectum erit. Atqui HG perpendicularis (*f*) eſt ad AG communem ſectionem planorum FKD & GBA. Ergo HG etiam (*g*) recta eſt plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque eſt ad (*h*) ipſam BG. Ergo GB latus coni erit altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentia FHLD, & latere coni comprehenſum (*i*) æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

(d) *Per hyp.*
(e) *Per 18. l. 11.*
(f) *Per 18. l. 3.*
(g) *Coll'g. ex def. 4. l. 11.*
(h) *Per def. 3. l. 11.*
(i) *Patet ex 1. l. 6.*

2. Partis ſimilis fere demonſtratio eſt.

[*Ponatur latera baſeos inſcriptæ pyramidis ordinatæ, lateribus circumſcriptæ parallela; & ſecet latus* CI *planum* GBA *in* O, *& jungatur* OB, *eritque* CI *ad planum* AOB (k) *recta, & proinde rectis* AO, BO, *à centro baſeos & à vertice coni ductis* (l) *perpendicularis. Sed omnes ejuſmodi rectæ*

(k) *Per 8. l. 11.*
(l) *Per def. 3. l. 11.*

AO a centro ad quodvis baſeos polygonæ ordinata latus perpendiculares, (a) *ſunt æquales, & proinde in omnibus triangulis BAO, propter axem BA communem & ad planum baſeos rectum, & omnia latere AO ſibi invicem æqualia,* (b) *erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem conſtituunt, æqualem habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, a cujuſvis trianguli vertice B ad baſim demiſſa; & ſimul ſumpta* (c) *æquabuntur (hoc eſt, ſuperficies pyramidis cono recto inſcriptæ æquabitur) triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis inſcriptæ circumferentia, & cujus altitudo eſt perpendicularis BO. Quod erat alterum.*

(a) Per 14.l.3.
(b) Per 4.l.1.
(c) Patet ex 1.l.6.

Aliter. *Cum triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem componunt, pro baſibus babeant æqualia polygoni ordinati, quod baſi coni inſcribitur latera, & pro cruribus æqualia coni recti latera; triangula iſta erunt ſibi mutuo æquilatera,* (d) *æquiangula, & (cum ſibi mutuo impoſita* (e) *congruant,) altitudinis æqualis. Unde ut prius, triangulum quod continetur ſub altitudine communi, & ſub baſi quæ omnibus triangulorum baſibus, ſive quæ perimetro polygoni inſcripti æquetur, triangulis iſtis, ſive pyramidis inſcriptæ ſuperficiei* (f) *æquale erit.*]

(d) Per 8.l.1.
(e) Per ax. 8.l.1.
(f) Patet ex 1.l.6.

PROPOSITIO X.

Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit (g) *in cylindri ſuperficiem: & pyramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.*

(g) Vide def. 6.l.12.

1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine circumſcriptorum & inſcriptorum ſuperficies, habebunt tandem inter ſe differentiam data minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis a ſuperficie cylindri, inter inſcriptam & circumſcriptam media, differet differentia minori quacumque data, hoc eſt, (*h*) deſinit in cylindricam ſuperficiem, minus ſemper ac minus excedendo.

Fig 6.
(h) Per def. 6.l.12.

2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

Fig 7.

In figuris tantum exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Ceterum cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clarius apparet planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores ex 2. axiomate.

[Scho-

Scholium. 1. *Cum propoſitiones 4. ſequentes, & quædam e corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonſtrentur, & eo ordine diſponantur, ut neceſſario per ambages procedendum ſit; opus tyronibus haud ingratum me facturum ſpero, ſi propoſitiones illas, una cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expedita, ex hac prop. 10. deduxerim.*

Corollaria ex prima parte prop. 10.

Fig. 8.

1 HInc ſequitur, cylindri recti ſuperficiem CD, æquari rectangulo ſub CB latere cylindri, & BN baſeos peripheria. Superficies enim priſmatum cylindro ſine fine circumſcriptorum, æquales ſemper (a) ſunt rectangulis ſub latere cylindri & baſium priſmaticarum perimetris. Sed ejuſmodi ſuperficies priſmaticæ in (b) ſuperficiem cylindricam, & perimetri baſium priſmaticarum in (c) peripheriam baſeos cylindri tandem deſinunt. Ergo (d) ſuperficies cylindri æquatur rectangulo ſub latere cylindri, & ſub baſeos peripheria.*

(a) Per 9. hujus. (b) Per hanc. prop. (c) Per 3. hujus. (d) Per 1. hujus.

Aliter. *Applicetur ad ſuperficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baſeos quæ peripheriæ baſeos cylindricæ æquetur; & interſe congruent charta atque ſuperficies cylindrica: ideoque (e) æquales ſunt. (Eſt cor. 1. pr. ſeq.)*

(e) Per ax. 7. l. 1.

2. *Hinc rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis conveniunt, ſi pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro baſibus, cylindricorum baſium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eamdem cum peripheriis proportionem (f) habent. Adeoque 1. Cylindricæ ſuperficies æque altæ, (g) ſunt inter ſe ut baſium diametri. (Eſt cor. 2 pr. ſeq.) 2. Quæ baſes habent æquales, ſunt (h) inter ſe ut cylindrorum latera. (Eſt cor. 3. p. ſeq.) 3. Quæ ſimiles ſunt, (i) erunt in duplicata ratione diametrorum quæ in baſibus ſunt. (Eſt cor. 4. p. ſeq.) 4. Et quælibet, (k) ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus laterum, & diametrorum (Eſt cor. 5. p. 11.) 5. Si æquales ſint, (l) reciprocant latera & baſium diametros; & ſi reciprocent, æquales ſunt. (Eſt cor. 6. p. 11.) 6. Si latus in baſeos peripheriam ducatur, (m) habebitur ſuperficiei cylindricæ area. Eſt cor. 7. prop. ſeq.)*

(f) Per 7. hujus. (g) Per 1. l. 6. & 7. hujus. (h) Per cor. 1 p. 1. l 6. (i) Per 20. l. 6. & 7. hujus. [K] Per 23. l 6. (l) Per 14. l. 6. (m) Per ſch. p. 34. l. 1.

3. *Cylindri recti ſuperficies CD, eſt ad baſim BN, ut cylindri latus BC eſt ad BO, quartam partem diametri baſeos. Eſt enim ſuperficies cylindrica (n) æqualis rectangulo ſub latere BC & peripheria baſeos. Sed baſis cylindri (o) æquatur rectangulo ſub BO quarta parte diametri baſeos & eadem peripheria:*

(n) Per cor. 1. prius. [o] Per cor. 1. p. 5. hui.

Quare

(a) Per 1.l.6. *Quare* (a) *ſuperficies cylindrica erit ad baſim, ut* BG *ad* BO. *(Eſt p. 12. infra.*

Fig. 27. *4. Hinc ſuperficies cylindri* GK, *ſphæræ circumſcripti, cujus nempe altitudo* NK *æquatur diametro baſeos* NG, *erit baſeos quadrupla, ſive baſium ambarum dupla; nam propter* NK $=$ NG, *erit ſuperficies cylindrica ad baſim, ut* NK *ad* $\frac{1}{4}$NK, *ſive ut 4. ad 1, ſive quadrupla baſeos; ac proinde ad utraſque baſes ut 4 ad 2, ſive baſium dupla. Et ſuperficies cylindri* EK, *hemiſphærio circumſcripti, erit baſeos dupla, ſive duabus baſibus æqualis. Si vero latus cylindri fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit.* (*Eſt cor. p. 12.*)

Fig. 9. & 8. *5. Sit* GH *media proportionalis inter* AB *baſeos radium, &* 2BC, *duplum lateris cylindri; eritque circulus radio* GH *æqualis ſuperficiei cylindricæ* CD. *Nam propter* AB, GH, 2BC
[b] Per cor. 2. p. 2. l. 12. ∺, *erit baſis* BN *ad circulum* GPH, (b) *ut* AB *ad* 2 BC.
(c] Per cor. 3. prius. *ſive ut* $\frac{1}{2}$ AB *ad* BC, *hoc eſt, ut* (c) *baſis* BN *ad ſuperficiem cylindricam* CD. *Ergo* (d) *circulus* GPH *ſuperficiei cylindricæ*
(d) Per 9. l. 5. *æqualis erit.* (*Eſt p. ſeq.*

Corollaria ex ſecunda parte prop. 10.

Fig. 10.

6. Coni recti ſuperficies CBD *æquatur triangulo ſub* BG *latere coni pro altitudine, & ſub peripheria baſeos coni* CG *pro*
[e] Per 9. hujus. *baſi. Etenim pyramidum cono ſine fine circumſcriptarum ſu-*
[f] Per hanc. prop. *perficies, ſemper* (e) *ſunt æquales triangulis, ſub latere coni* BG *pro altitudine, & ſub baſium pyramidalium perimetris* EF
(g] Per 3. hujus. *pro baſibus. Atqui ejuſmodi ſuperficies pyramidales in* (f) *ſu-*
(h] Per 1. hujus. *perficiem conicam, & baſium pyramidalium perimetri in baſeos coni* (g) *peripheriam tandem deſinunt: Adeoque* (h) *ſuperficies coni æquatur triangulo ſub coni latere pro altitudine, & ſub peripheria baſeos pro baſi.*

Aliter. *Aptetur ad ſuperficiem conicam charta, quæ illi ex amuſſim congruat; & habebis charta illa, in planum extenſa,*
(i) Patet ex def. coni recti, & ſectoris circ. *formam ſectoris circuli, cujus radius coni lateri, & cujus arcus peripheriæ baſeos coni* (i) *æqualis erit. Sed ejuſmodi ſector* (k) *æquatur triangulo ſub dicto ſectoris radio pro altitu-*
[k) Per cor. 3. p. 4. huj. *dine, & ſub recta quæ arcui æquetur pro baſi; hoc eſt, ſub late-*
(l) Per ax. 7. & 1. l. 1. *re coni pro altitudine, & ſub peripheria baſeos coni pro baſi. Quare* (l) *& ſuperficies coni eidem triangulo æquabitur.* (*Eſt cor. 1. pr. 13.*)

7. Hinc triangulorum proprietates ſuperficiebus conicis rectis
(m) Per 7. hujus. *cōveniunt, ſi pro triangulorum altitudinibus ponantur conorum*
(n) Per 1. l. 6. *latera, & pro baſibus baſium peripheriæ* (m) *vel diametri. Ergo, 1. Superficies conicæ æqualia latera habentes,* (n) *ſunt*

ut

Digitized by Google

ut baſium diametri. 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (a) *ut latera*. 3. *Quæ ſimiles ſunt, duplicatam* (b) *habent rationem diametrorum quæ ſunt in baſibus*. 4. *Et qualibet rationem* (c) *habent compoſitam ex rationibus laterum & diametrorum quæ ſunt in baſibus*. 5. *Et quæ æquales ſunt*, (d) *reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, æquales ſunt*. 6. *Habetur* (e) *denique ſuperficies conica, multiplicando latus coni in dimidiam baſeos peripheriam*. (*Hæc ſunt corollaria* 2, 3, 4, 5, 6, & 7. *pr*. 13. *infra*.)

(a) Per cor. 1. p. 1. l. 6. (b) Per 19. l. 6. (c) Per cor. 2. p. 23. l. 6. (d) Per 15. l. 6. (e) Per ſchol. p. 41. l. 1.

8. *Coni recti ſuperficies CBD eſt ad baſim, ut coni latus BC ad baſeos radium AC. Eſt enim ſuperficies coni* (f) *æqualis rectangulo ſub latere BC & dimidia peripheria baſeos. Sed coni baſis* (g) *æquatur rectangulo ſub radio AC & eadem peripheria dimidia. Ergo* (h) *ſuperficies coni erit ad baſim, ut BC ad AC*. (*Eſt pr*. 14. *infra*.)

(f) Per cor. 6. prius, & cor. p. 42. l. 1. (g) Per cor. 1. p. 5. huj. (h) Per 1 l. 6.

9. *Hinc primo*, (*fig*. 30.) *ſuperficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem AK circumacto geniti, baſeos QT dupla eſt. Eſt enim BK latus coni, ſemidiametri baſeos AB duplum*. 2. (*fig*. 27.) *ſuperficies coni a triangulo rectangulo æquicruri BD circa perpendicularem AB circumacto producti, eſt ad baſim, ut in quadrato diameter BD ad latus DA*. 3. (*fig*. 27.) *ſuperficies cylindri recti GK, eſt ad ſuperficiem coni recti GBN, ejuſdem baſeos & altitudinis, ut cylindri latus NK ad* $\frac{1}{2}$ *BN dimidium latus coni. Eſt enim ſuperf. GBN ad baſim MI*, (i) *ut BN ad NQ ſive* $\frac{1}{2}$ *NG; hoc eſt, ut* $\frac{1}{2}$ *BN ad* $\frac{1}{4}$ *NG. Sed baſis MI eſt ad ſuperf. GK*, (k) *ut* $\frac{1}{4}$ *NG ad NK. Ergo* (l) *ſuperf. GBN eſt ad ſuperf. GK, ut* $\frac{1}{2}$ *BN ad NK: &* (m) *invertendo, ſuperficies cylindri GK erit ad ſuperficiem coni GBN, ut latus cylindri NK ad dimidium latus coni*, $\frac{1}{2}$ *BN*. (*Hæc ſunt corollaria* 1, 2, & 3. *pr*. 14.)

(i) Per cor. 8. prius. (k) Per cor. 3. prius. (l) Per 22. l. 5. (m) Per ſch. p. 16. l. 5.

10. *Sint AC, OL, CB* ∺ *Erit circulus radio OL æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Eſt* (n) *enim baſis coni CG ad ſuperficiem conicam CBD, ut AC ad CB, hoc* (o) *eſt, ut eadem baſis coni ad circulum OPL. Itaque* (p) *circulus OPL ſuperficiei conicæ æqualis erit*. (*Eſt pr*. 13. *infra*.

Fig. 10. 11. (n) Per cor. 8. prius. (o) Per cor. 2. p. 2. l. 12. (p) Per 9. l. 5.

Scholium 2.

Hiſce adjicimus duas propoſitiones e Galilæo deſumptas.

1. Cylindri quorum ſuperficies æquantur, ſunt inter ſe ut baſium diametri directe, vel ut altitudines cylindrorum reciproce. *Cylindri enim ſunt* (q) *ut baſes & altitudines; hoc* (r) *eſt, in duplicata ratione diametrorum in baſibus, & ſimplici ratione altitudinum. Sed ſuperficies cylindricæ ſunt* (ſ) *ut diametri*

(q) Per n. 1. in ſchol. p. 15. l. 12. (r) Per 2. l. 12. (ſ) Per n. 4. cor. 2. p. 10. hujus.

diametri baſium & altitudines cylindrorum. Cylindri igitur erunt ut diametri baſium & ſuperficies: (nam ſi ratio diametrorum componatur cum ratione ex diametris & altitudinibus compoſita, exorietur ratio compoſita ex duplicata ratione diametrorum & ſimplici altitudinum.) Cum itaque ſuperficies ponantur æquales, cylindri (a) *erunt ut diametri baſium directe; vel ut* (b) *altitudines reciproce.*

Aliter. *Sint altitudines* A, α; *baſium diametri* B, β; *erunt ſuperficies ut* (c) AB, & $\alpha\beta$; & *baſes ut* (d) BB, & $\beta\beta$; *ac cylindri ut* (e) ABB, & $\alpha\beta\beta$. *Sed per hypoth. cylindricæ ſuperficies æquantur, hoc eſt,* $AB = \alpha\beta$. *Ergo* (f) $A : \alpha :: \beta : B$. *Et ducendo antecedentes in* BB, & *conſequentes in* $\beta\beta$, *erit* (g) $ABB : \alpha\beta\beta :: BB\beta : B\beta\beta ::$ (h) $B : \beta ::$ (i) $\alpha : A$.

2. (*Fig.* 29. & 28. *l.* 12.) Æqualium cylindrorum (FD, AR) ſuperficies ſunt inter ſe, in ſubduplicata ratione altitudinum. H*oc eſt, ſi inter altitudines* ND, BR, *ponatur media proportionalis* P; *erit* (k) ND *ad* P (*ſive* P *ad* BR) *ut ſuperficies cylindri* FD *ad ſuperficiem cylindri* AR.

Nam propter $BR, P, ND \div$, *erit* $Pq : NDq ::$ (l) $DR : ND ::$ (m) $VT : MQ :: FNq : ABq$; & $P : ND ::$ (n) $FN : AB ::$ (o) *ſuperf.* FD : *ſuperf.* AO. *Sed* ND (*ſive* BO) : $BR ::$ (p) *ſuperf.* AO : *ſuperf.* AR. *Ergo ex* (q) *æquo,* $P : BR ::$ (*ſive* $ND : P ::$) *ſuperf.* FD : *ſuperf.* AR.

Aliter. *Si inter altitudines* A, α *ſit* M *media proportionalis, ſintque* B, β *baſium diametri, ut ſupra; erunt baſes ut* BB, $\beta\beta$; *ſuperficies ut* AB, $\alpha\beta$; & *cylindri ut* ABB, $\alpha\beta\beta$. *Et cum cylindri ſint æquales, hoc eſt,* $ABB = \alpha\beta\beta$, *erit* $AB : \alpha\beta :: \beta : B$. *Et cum per* 15. *l.* 12. *ſit* $\beta\beta : BB :: A : \alpha$; (r) *erit* $\beta : B :: A : M$. *Ergo* $AB : \alpha\beta :: A : M$. *Q. E. D.*

Corol. *Hinc ingentem illam particularum corpora naturalia componentium ſubtilitatem aliquo modo percipere datum eſt. Sit* FD *cylindrus argenteus ſuperficiem habens deauratam, ſive bracteis aureis obductam; quem opifices in auri filum immanis longitudinis producunt. Eſt nempe altitudo cylindri* FD *ad fili longitudinem, ut* 1 *ad* 115600; *inter quas, media proportionalis, ſive* $\sqrt{115600}$, *eſt* 340. *Itaque bractea aurea qua tegitur ſuperficies fili,* 340 *vicibus tenuior erit quam illa qua ſuperficies cylindri* FD *obducitur.* Vide Rohault. Phyſ. par. 1. cap. 9. ſect. 11.]

(a) Per def. 3. l. 5. & def. 5. l. 6.
(b) Per n. 5. cor. 2. p. 10. hujus.
(c) Per n. 4. cor. 2. p. 10. hujus.
(d) Per 2. l. 12.
(e) Per n. 1. in sch. p. 15. l. 12.
[f] Per 16. l. 6.
[g] Per 4. l. 5. (ſive per lem. 1. par. 2. l. 5.)
[h] Per 15. l. 5.
[i] Prius.
(k) Per def. 10. l. 5.
[l] Per sch. p. 10. l. 6.
(m) Per 15. l. 12.
(n) Per 35. l. 5.
[o] Per n. 1. cor. 2. p. 10. hujus.
[p] Per n. 2. cor. 2. p. 10. hujus.
[q] Per 22. l. 5.
(r) Per def 10. l. 5. cum ſch. p. 20. l. 6.

Lemma ad ſequent.

Fig. 11. SInt AB, CD, EF proportionales, ſitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt.

Recta

Recta KB eſt ad AB, ut *(a)* EF ad EG. Rectangulum ergo KB, EG æquatur (per 16.l.6.) rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17.l.6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par eſt quadrato CD. Ergo per 17.l.6. KB, CD, EG ſunt proportionales.

(a) *Per* 15.*l*.5.

[Aliter. *KB: AB::* (b) *EF: EG. Sed AB : CD ::* (c) *CD : EF. Ergo* (d) *ex æquo perturbate, KB: CD:: CD: EG.*]

(b) *Per* 15.*l*.5. (c) *Ex hyp.* (d) *Per* 23.*l*.5.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) *eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baſeos diametrum (BD,) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ.* Fig.9.&10.

Intelligantur circulis ABN, GPH, circumſcripta eſſe [*ejuſdem ſpeciei*] ordinata polygona, adeoque ſimilia, NM, RS, & ſuper NM polygono erectum eſſe priſma, cylindro circumſcriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. ſunt proportionales, etiam AD (ſeu AN) GH & dupla BC *(e)* proportionales erunt. Jam triangulum ſub AN & ambitu polygoni MN contentum, *f*) æquatur polygono conſcripto NM: rectangulum vero ſub BC (ſeu EF: & eodem ambitu NM, (hoc eſt, *(g)* triangulum ſub ambitu NM & dupla CB,) æquale eſt (*h* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu NM & AN, eſt ad triangulum ſub ambitu NM & dupla BC, *(i)* ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam oſtendi AN, GH, duplam BC, eſſe proportionales: ratio AN ad duplam BC eſt duplicata *(k)* rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad ſimile ſibi poligonum GRQS, rationem habet duplicatam rationis AN ad GH, ut facile colligitur ex 1. lib. 12. [*Nam ductâ GQ, triangula ANK, GHQ (propter angulos ANK, GHQ rectos, & AKN, GQH polygonorum ſimilium ordinatorum* (l) *ſemiangulos) ſunt* (m) *æquiangula & ſimilia. Ergo AK: GQ:: AN: GH. Sed per* 1. *l.* 12 *polygona ſunt in duplicata ratione radiorum AK, GQ, circulorum quibus ipſa polygona ſunt inſcriptibilia: ac proinde erunt* (n) *in duplicata ratione radiorum AN, GH, circulorum quibus eadem polygona circumſcribuntur.*] Ergo polygonum NM ad ſuper-

[e] *Per lem.* [f] *Per* 4. *hujus.* [g] *Patet ex cor. p.* 42.*l*.1. (h) *Per* 8. *hujus.* (i) *Per* 1.*l*.6. (K) *Per def.* 10 *l*.5. (l) *Per* 12 *l*.4. *cum ſchol.* (m) *Per cor.* 9.*p* 12.*l*.1. (n) 11.*l*

ſuperficiem priſmatis,& ad polygonum GRQS eamdem habet rationem; quæ proinde æqualia(*a*) ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles, ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumſcribi poſſent. Quare cum & ſuperficies priſmaticæ (*b*) in cylindri ſuperficiem, & polygona (*c*) in circulum GPH deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo GPH æqualis (*d*) erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 9. l. 5. (b) Per 10. hujus. (c) Per 3. hujus. [d] Per 1. hujus.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

Fig. 8. & 9. *Superficies cylindri recti æqualis eſt rectangulo ſub latere (BC) & baſeos peripheria contento.*

Dupla BC (ut oſtenſum ſupra) eſt ad GH, ut GH ad BA, ſeu AN; Hoc eſt, ut (*e*) peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum ſub prima, nempe dupla BC, & quarta, nempe peripheria BN, æquatur (*f*) triangulo ſub ſecunda GH, & tertia, peripheria ſcilicet P. Sed triangulum ſub GH & peripheria P, æquale (*g*) eſt circulo GPH, hoc eſt, (*h*) ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla BC & peripheria BN,(hoc eſt,(*i*) rectangulum ſub BC & peripheria BN,) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

(e) Per 7. hujus. (f) Per cor. 4. p. 16. l. 6. (g) Per 5. hujus. [h] Per hanc. [i] Per cor. p. 41. l. 1.

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe communes. Eſto igitur corollarium.

Fig. 24. & 25. l. 12. 2. Cylindricæ ſuperficies (BM, QN) æque altæ, ſunt inter ſe ut baſium diametri (BF, QR.)

Nam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehenſa, quibus cylindricæ ſuperficies(*k*) ſunt æquales, ſunt inter ſe (*l*) ut baſes; peripheriæ videlicet CL, SE: hoc eſt, (*m*) ut diametri BF, QR.

[K] Per cor. 1. [l] Per 1. l. 6. (m) Per 7.

Fig. 27. & 2. l. 12. 3. Cylindricæ ſuperficies(CI, AR) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut altitudines (TI, BR.)

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus ſuperficies(*n*) cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter (*o*) ſe ut TI, BR.

(n) Per cor. 1. [o] Per 1. l. 6.

Fig. 24. & 25. l. 12. 4. Similes cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent baſium diametri (BF, QR.)

Cum

Digitized by Google

Cum cylindri ponantur ſimiles, erit MF ad IQ, (*a*) ut (a)*Per def.*
BF ad QR, hoc eſt, (*b*) ut peripheria CL ad peripheriam *4.l.12.* (b) *Per*
SE. Quare etiam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & *7. hujus.*
lateribus MF, IQ contenta, ſimilia (*c*) erunt; ac proinde (c)*Per def.*
rationem inter ſe habebunt (*d*) duplicatam ejus, quam ha- *1. l.6.*
bet MF ad IQ; hoc eſt, BF ad QR. Ergo & cylindricæ (d) *Per* *10.l.6.*
ſuperficies, &c.

5. Cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem inter ſe ha- *Fig. 24. & 25.l.12.*
bent (*e*) compoſitam ex rationibus laterum (FM, IQ) & dia- (e)*Per 23.l.*
metrorum (BF, QR) quæ ſunt in baſibus. *6.& 7. huj.*

6. Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (AR, FD;) erit
ut diameter AB ad diametrum FN, ita (*f*) reciproce altitu- *Fig. 28.& 29.l.12.*
do FH ad altitudinem RB: & e converſo. (f) *Ex.14.*

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ ſuperfi- *l.6.*
ciei dimenſio; ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos periphe-
riam. Ut ſi altitudo ſit pedum 20. peripheria baſis pedum 6.
multiplica 20 per 6. proveniunt 120. pedes quadrati pro cy-
lindrica ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti ſuperficies eſt ad baſim (ABN,) ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam partem diametri baſeos. *Fig. 8. & 9. Archim.*

Sit GH media proportionalis inter BC & BD diametrum
baſis, ac proinde etiam media (*g*) proportionalis inter BA (g)*Per lem.*
ſeu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH, æqua- *ante p. 11.*
tur curvæ ſuperficiei (*h*) cylindricæ CD. Sed circulus GPH *hujus.*
ad cylindri baſim ABN, rationem habet duplicatam (*i*) ra- (h) *Per* *11. hujus.*
tionis GH ad AN; hoc eſt, (*k*) eamdem quam dupla BC ad (i) *Per cor.*
BA radium; hoc eſt, eamdem quam BC ad BO quartam dia- *2.p.2.l.12.*
metri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim (k) *Per* *hyp & de-*
ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod *fin.10.l.5.*
erat demonſtrandum.

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro baſis æquale
baſeos quadrupla eſt. Si vero latus fuerit quarta pars dia-
metri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Utrumque
ex propoſitione manifeſtum eſt.

Digitized by Google

PROPOSITIO XIII.

Fig. 11. & 10.

CIrculus, cujus radius (OL) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (BC) & baſis radium (AC,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ.

Intelligantur circulis ACG, OPL circumſcripta eſſe polygona ordinata (*ſimilia*) EF, IN, & ſuper polygono EF erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. AC ſeu AG eſt ad OL, ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata (*a*) rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum ſub AG & ambitu EF eſt ad triangulum ſub BC & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli ſub AG & ambitu EF ad triangulum ſub BC & eodem ambitu, eſt etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum ſub AG & ambitu EF æquale eſt (*b*) polygono EF: & triangulum ſub BC & eodem ambitu EF æquale (*c*) eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile IN, eſt duplicata (*d*) rationis AG ad OL, [*uti conſtat ex iis quæ demonſtrationi prop. 11. inſeruntur.*] Ergo polygonum EF, ad ſuperficiem pyramidis & ad polygonum IN eamdem habet rationem, quæ proinde æqualia (*e*) erunt. Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis quæ circulo OPL poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum (*f*) ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum (*g*) OPL tandem deſinant, etiam coni (*h*) ſuperficies & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat demonſtr.

(a) *Per def. 10. l. 5.*
(b) *Per 4. hujus.*
(c) *Per 9. hujus.*
(d) *Colligitur ex p. 1. l. 12.*
(e) *Per 9. l. 5.*
(f) *Per 10. hujus.*
(g) *Per 3 hujus.*
(h) *Per 1. hujus.*

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

Fig. 10. & 11.

1. *REcti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo, ſub coni latere (BC), & baſeos peripheria (CG) comprehenſo.*

Sit

Sit OL radius media proportionalis inter AC & BC. Quia peripheria CG eſt ad peripheriam P, ut (*a*) radius AG ad radium OL; hoc eſt per hyp. ut OL ad BC: erit triangulum ſub prima, nempe peripheria CG, & ſub quarta BC, (*b*) æquale triangulo ſub ſecunda, nempe peripheria P, & tertia OL; hoc eſt, (*c*) circulo OPL, hoc eſt, (*d*) ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per 7. hujus.* (b) *Per cor. 4. p. 16. l. 6.* (c) *Per 5. hujus.* (d) *Per hanc 13.*

Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Itaque

2. Superficies conicę (BAF, QXR) æqualia latera (BA, QX) habentes, ſunt inter ſe ut baſium diametri (BF, QR.) *Fig. 24. & 25. l. 12.*

3. Et (CFT, AZB) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut latera (CF, AZ.) *Fig. 27. & 28. l. 12.*

4. Et quæ ſimiles ſunt (BAF, QRZ,) duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros. *Fig. 24. & 25. l. 12.*

5. Et quælibet, rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum BF, QR) quæ ſunt in baſibus. *Fig. ead.*

6. Et quæ æquales ſunt, reciprocant latera & baſium diametros: & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. ut ſupra corollaria de cylindrica ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

7. Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5. peripheria baſeos pedum 20. duc 5. per 10. proveniunt 50. pedes quadrati pro conica ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll. *Fig. 29. l. 12.*

PROPOSITIO XIV.

Coni recti ſuperficies eſt ad baſim, ut latus (BC) *ad baſis radium* (AC.) *Fig. 30. & 31. Arch.*

Inter latus BC & baſis radium AC, ſit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC eſt duplicata (*e*) rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL (*f*) eſt æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni baſim ACG eſt duplicata (*g*) rationis OL ad AC; ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ CBD eſt ad baſim ACG; ut BC ad AC. Quod erat demonſtrandum. (e) *Per def. 10. l. 5.* [f] *Per 13. hujus.* (g) *Per 2. l. 12.*

Digitized by Google

Corollaria.

Fig. 30. *S Uperficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem (KA) circumacto geniti, baſeos (QT) dupla eſt.*

Eſt enim KB latus æquale BD, adeoque duplum ſemiſſis AB, quæ baſeos radius eſt,

Fig. 27 2. *Superficies coni a rectangulo triangulo æquicruri (EBD) produ ta, eſt ad baſim, ut in quadrato diameter ad latus.*

(a) Per n. 1. ſchol. p. 26. l. 11. (b) Per cor. 11. p. 32. l. 1. (c) Per 6. l. 1. (d) Per n. 1. ſchol. p. 26. l. 1.

Ducta enim perpendiculari BA, (a) angulus rectus B biſecatur, adeoque ABD ſemirectus eſt. Eſt autem & ADB (b) ſemirectus. Ergo AD, BA (c) æquales ſunt; ac proinde BD eſt diameter quadrati AK, latus vero AD. Eſt vero eadem AD ſemidiameter baſeos PT, cum perpendicularis AB ſecet (d) biſariam ED. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

Fig. 27. 3. *Superficies cylindri recti (GK) eſt ad ſuperficiem coni recti (GBN), ut cylindri latus ad dimidium latus coni.*

(e) Per 14. hujus. (f) Per 12. hujus.

Nam ſuperficies coni GBN eſt ad baſim MI, ut latus BN ad (e) ſemidiametrum baſis QN; hoc eſt, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Eſt autem baſis MI ad ſuperficiem cylindri GK, ut (f) quarta pars diametri ad NK cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica GBN eſt ad ſuperficiem cylindricam GK, ut dimidium latus coni ad cylindri latus NK. Quod erat demonſtrandum.

Lemma ad ſequen.

Fig. 13. IN triangulo NPV ducta ſit QD parallela ad NV.
Dico rectangulum ſub PN & NV, æquari rectangulo ſub PQ, QD, una cum rectangulo ſub NQ & duabus ſimul ſumptis NV, QD.

Duc lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA ſecet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN eſt par NV, [*& quoniam* (a) *AN: QB (:: NP: QP) :: NV: QD*,] patet etiam (*b*) QB eſſe partem QD. Igitur rectangulum ON eſt rectang. PNV & FQ eſt PQD. Reſtat ut probemus rectangula OB, EC, BN æquari rectangulo ſub NQ & duabus NA, QB; hoc eſt, ſub NQ & duabus NV, QD. Id vero eſt manifeſtum: rectangulum enim ſub NQ & NA, QB, æquatur (*c*) his tribus rectangulis; ſub NQ & CA, (hoc eſt, ſpatio EC,) ſub NQ & NC, (hoc eſt, ſpatio BN,) ſub NQ & QB, hoc eſt rurſum, ſpatio BN, ac proinde ſpatio OB, quod ipſi BN (*d*) æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

(a) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*
(b) *Per 11. & 9. cum ſchol. p. 7. l. 5.*
(c) *Per 1. l. 2.*
[d] *Per 43. l. 1.*

PROPOSITIO XV.

Si conus rectus ſectus ſit plano QSR baſi NZO parallelo; Dico circulum GHM, cujus radius GH eſt medius proportionalis inter partem lateris NQ, & circulorum QSR, NZO radius QD, NV ſimul ſumptos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos QSR, NZO interceptæ. Fig. 14. & 15.

Inter PN & NV media ſit GF. Item inter PQ & QD ſit media GK; deſcribanturque circuli GFL, GKT. Erit hic (*e*) æqualis ſuperficiei conicæ QPR, ille ſuperficiei NPO. Rectangulum PNV æquatur (*f*) rectangulo PQD, una cum rectangulo ſub NQ, & NV, QD ſimul ſumptis. Sed quia (*g*) GF media eſt proportionalis inter PN, NV, rectang. PNV eſt æquale (*h*) quadrato GF: Et quia GK eſt (*i*) media inter PQ, QD, rectang. (*k*) PQD æquatur quadrato GK: Et quia GH media (*l*) eſt inter QN, & QD, NV ſimul ſumptas, rectangulum ſub QN, & QD, NV ſimul ſumptis, æquale eſt (*m*) quadrato GH. Ergo quad. GF par quoque eſt quadratis GH, GK. Ergo, cum circuli ſint inter ſe ut (*n*) quadrata radiorum, erit quoque circulus GLF æqualis duobus circulis, GKT & GHM. Atqui circulus GLF eſt æqualis (*o*) ſuperficiei conicæ NPO. Ergo etiam ſuperficies conica NPO æquatur duobus circulis GKT & GHM. Atqui ſuperficiei NPO pars una QPR (*p*) æqualis eſt circulo GKT. Ergo reliqua, inter parallelos circulos

(e) *Per 13. hujus.*
(f) *Per lem.*
(g) *Per conſtr.*
[h] *Per 17. l. 6.*
[i] *Per conſtr.*
[K] *Per 17. l. 6.*
[l] *Per hyp.*
(m) *Per 17. l. 6.*
(n) *Per cor. 2. p. 2. l. 12.*
[o] *Per 13. hujus.*
(p) *Per eamd.*

ZZ, SS comprehenſa, æquatur circulo GHM. Quod erat demonſtrandum.

[Corol. *Hinc ex datis circulorum parallelorum radiis NV, QD, & ſuperficiei conicæ inter circulos interceptæ latere NQ, habetur ſuperficiei illius dimenſio, ſi radiorum ſumma NV + QD per latus NQ multiplicetur, & facti radix quadratica extrahatur. Erit enim ut* 113 *ad* 355, *ita radix iſta ad terminum quartum. Quo termino in radicem illam ducto exoritur ſuperficies conica quæſita. Patet ex* 17. *l.*6. *& ſchol. p.* 6. *hujus, cum p.* 15. *l.* 15.]

Lemma ad ſequen.

Fig. 16. REctæ (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, ſunt parallelæ.

Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. ſunt æquales, etiam (*a*) anguli BHC, GCH alterni æquales erunt. Ergo (*b*) BH & CG ſunt parallelæ, Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 29. l. 3. (b) Per 28. l. 1.

[Scholium. *Hinc oritur methodus facillima ducendi per punctum datum B, rectæ datæ CG parallelam BH, uti ſupra ad prop.* 31. *l.* 1. *notatum eſt.*]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 16. *IN ſcribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera,* [cujus latera quaternarius metiatur;] *ducaturque EB ab extremitate diametri ad B terminum lateris diametro proximi; angulos vero æqualiter diſtantes ab A jungant rectæ BH, CG, DF;*

Dico rectangulum quod diametro AE, & ſubtenſa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inſcriptæ (AB, vel BC, &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis.

(c) Per 26. l. 3. (d) Per lem. prec. (e) Per 27. & 15. cum cor. 9. p. 32. l. 1. (f) Per 4. l. 6.

Duc CH, DG. Quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus (*c*) æquales, BC, HG; CD, GE; erunt (*d*) parallelæ. Pari argumento parallelæ ſunt BA, CH, DG, EF. Omnia igitur triangula (*e*) BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula ſunt. Ergo (*f*) ut BK ad KA, ſic HK ad KL; & ut

& ut HK ad KL, ſic CM ad ML; & ut CM ad ML, ſic GM ad MN; & ut GM ad MN, ſic DO ad ON; & ut DO ad ON, ſic FO ad OE. Ergo (a) ut una antecedentium BK ad unam conſequentium KA; ſic omnes antecedentes BK, KH CM, MG, DO OF, (hoc eſt, omnes jungentes BH, CG, DF) ſunt ad omnes conſequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE, hoc eſt, ad diametrum AE. Sed ut BK ad (b) BK, ſic EB eſt ad BA. Ergo ut omnes ſimul BH, CG, DF ad AE, ſic EB eſt ad BA. Ergo (c) rectangulum ſub omnibus jungentibus BH, CG, DF & ſub BA, æquatur rectangulo ſub AE & EB. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 12. l. 5.
(b) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(c) Per 16. l. 6.

[Cor. 1. *Omnes jungentes BH, CG, DF, a diametre AE bifariam & perpendiculariter ſecantur. Nam in triangulis BAK, HAK, propter latera BA, AK lateribus KA, AH æqualia & angulos ad A* (d) *æquales, erit* (e) BK = KH : *& anguli ad K æquales, & proinde* (f) *recti. Et eodem modo ad jungentem quamvis aliam CG, ductis AC, AG, oſtendetur eſſe* CM = MG, *& angulos ad M rectos.*

(d) Per 29. l. 3.
(e) Per 4. l. 1.
[f] Per def. 14. l. 1.

Cor. 2. *Si jungens CG ſit diameter circuli; angulus CGH a jungente & latere proximo comprehenſus, acutus erit. Ducta enim CH, angulus CHG in ſemicirculo rectus* (g) *eſt, & proinde angulus HGC* (h) *acutus.*

[g] Per 31. l. 3.
[h] Per cor. 4 p. 32. l. 1.

Si vero recta jungens ſit diametro minor, ut BH; angulus ABH ad partem ſegmenti minoris, a latere figuræ inſcriptæ AB, & jungente BH comprehenſus, etiam (i) *acutus erit. Eſt enim angulus ſuper arcu AH in ſegmento majore ABEH.*

[I] Per 31. l. 3.

Cor. 3. *Si CAG aut ſemicirculus, aut ſegmentum ſemicirculo minus, a jungente CG terminatum: latera CB, CH, jungenti proxima, ad partem ſegmenti CAG, ſi ultra B, H ſatis producantur, concurrent; & concurſu formabunt triangulum iſoſceles ſuper baſi CG, cujus vertex erit in aliquo diametri EA, ultra A productæ, puncto.*

Nam propter angulos BCG, CGH duobus rectis (k) *minores; rectæ CB, GH ultra B & H productæ,* (l) *concurrent. Et propter arcus BAHG, CBAH æquales; iidem anguli BCG, CGH erunt* (m) *æquales; & proinde latera CB, GH concurſu ſuo formabunt* (n) *triangulum iſoſceles ſuper baſi CG. Et quoniam baſis a recta AM bifariam & perpendiculariter* (o) *ſecatur; ipſa MA producta, per trianguli verticem* (p) *tranſibit.*]

[K] Per cor. 2
(l) Per ſch. p. 31 l. 1.
(m) Per 29 l. 3.
(n) Per 6. l. 1.
[o] Per cor. 1.
[p] Per n. 4. ſchol. p. 26. l. 1.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 17. *SEgmento circuli* DAF *, cujus baſis* DF *perpendicularis ſit diametro* AOE *, inſcribatur figura æquilatera & parilatera , ducaturque ut in præcedenti recta* EB *:*

Dico rectangulum ſub EB *& parte diametri* AO *, quæ ſegmenti axis eſt, comprehenſum, æquari rectangulo ſub latere uno figuræ inſcriptæ, & omnibus jungentibus* BH, CG *, una cum* DO *dimidio baſis* DF *ſimul ſumptis comprehenſo .*

Demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Sit enim $AB : BE :: AK : KB :: LK : KH :: LM : MC :: NM : MG :: NO : OD$. *Ergo* $AB : BE :: AK + KL + LM + MN + NO : BK + KH + CM + MG + DO$ *; hoc eſt,* $AB : BE :: AO : BH + CG + DO$. *Ergo* $EB \times AO = AB \times \overline{BH + CG + DO}$.

Fig. 20. Scholium. *Si ſegmento* DAF *ejuſmodi figuram æquilateram & parilateram* DHAGF *inſcribi contigerit, ut latera duo oppoſita* DH, FG *ſint axi* AO *& ſibi invicem parallela; manifeſtum eſt illa circa eumdem axem* AO *(ſecundum lemmata ſubſequentia) circumacta, ſuperficiem cylindricam (non conicam) generatura. Et quamvis eo etiam in caſu valeret hæc propoſitio, & (ex p. 11. hujus cum p. 15. collata) ad prop. 19. demonſtrandam æque accŏmodari poſſet; ut tamen eadem ubique conſervetur demonſtrandi ratio ac forma, & quod in prop. 18, 20, & 22. de ſuperficiebus conicis aſſeritur , idem de ſolis conicis (& non de conicis cum cylindrica) affirmari poſſit in prop. 19, 21, & 23; præſtiterit forte, quandocumque latera oppoſita* DH, FG *axi* AO *parallela ſunt, arcus omnes* DH, HA, *&c. biſecando, figuram duplo pluriam laterum (ut* DCHBA *&c.,) eidem ſegmento inſcribere, quo latera omnia figuræ, ſegmento* DAF *inſcriptæ, (cum ad axem* AO *inclinentur,) ex circumvolutione ſegmenti ac figuræ inſcriptæ circa eumdem axem, ſuperficies conicas generare valeant .*

Lemma I. *ad ſequen.*

Fig. 16. INſcripta ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem AE conſiſtens : Quo manente, circulus cum figura circumagatur:

Dico

Digitized by Google

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quod BA, HA, item DE, FE deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies, manifeſtum (*a*) eſt. Deinde quia lineæ CB, GH, & GF, CD concurrunt (*b*) productæ in eodem utrimque puncto diametri AE ſimiliter protractæ, quæ jungentes ſecat normaliter [*& bifariam*]; etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quorum peripherias in ſphærica ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D.

(a) *Vide def. 2. l. 12.*
(b) *Per cor. 3. p. 16. huj.*

Lemma 2.

Segmenti ſphæræ, cujus axis AO, ſectio maxima esto DAF. Huic inſcripta ſit figura æquilatera [*& parilatera*] dempta baſi, [*ita tamen*, (c) *ut nullum figuræ inſcriptæ latus ſit axi AO parallelum*;] quæ [*cum ſegmento*] circa axem AO in orbem convertatur: *Fig. 17.*

Dico ſegmento ſphærico inſcriptum iri corpus conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

(c) *Vide ſch. poſt pr. 17. hujus.*

PROPOSITIO XVIII.

Ponantur eadem quæ in primo lemmate; *& ducatur recta* EB, *ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi*: *Fig. 16.*

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius (I) *poteſt rectangulum* AEB, *comprehenſum videlicet, ſub diametro* AE, *& ſubtenſa* EB, [nimirum ut ſit Iq = AE + EB.]

Hoc eſt, cujus radius (I) eſt medius proportionalis inter AE & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis (*d*) BK, CM, DO bis ſumptis, erit (*e*) rectangulum ſub latere uno figuræ inſcriptæ maximo circulo, (videlicet ſub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & ſub omnibus ſimul jungentibus BH, CG, DF, æquale rectangulo ſub AB & BK, ſub BC & compoſita ex BK & CM, ſub CD & compoſita ex CM & DO ſub DE & DO; ſic enim rectæ BK CM, DO ſingulæ fuerunt

[d] *Per cor. 1. p. 16. huj.*
(e) *Per 2. l. 2.*

erunt bis acceptæ. Atqui rectangulum ſub AB & omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis æquatur (*a*) rectangulo AEB, hoc eſt (*b*) quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub AB & BK, ſub BC & compoſita ex BK, CM, ſub CD & compoſita ex CM, DO, ſub DE & DO. Sint jam inter AB & BK, media proportionalis P; inter BC & compoſitam ex BK, CM, media Q; inter CD & compoſitam ex CM, DO, media R; inter DE & DO media S. Erunt igitur quadrata P. Q, R, S æqualia (*c*) rectangulis ſupradictis. Quare cum quadratum I jam oſtenderim iiſdem æquari rectangulis; etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli ſint inter ſe (*d*) ut quadrata radiorum; etiam circulus radio I deſcriptus, omnibus ſimul circulis quorum radii P, Q, R, S, æqualis (*e*) erit. Atqui circuli radiorum P & S, æquantur (*f*) ſuperficiebus conicis quas produxerunt latera AB, ED, ſiquidem P eſt media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baſeos; Si vero media eſt inter ED & DO: & circulus radii Q eſt æqualis ſegmento (*g*) ſuperficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media eſt inter BC, & compoſitam ex BK, CM: & ob eamdem cauſam circulus radii R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I deſcriptus, æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 16. *hujus.*
(b) *Per hyp.*
(c) *Per* 17. *l.* 6.
(d) *Per cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12.
(e) *Patet ex cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12. & *p.* 24 *l.* 5.
(f) *Per* 13. *hujus.*
(g) *Per* 15. *hujus.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17.

Ponantur eadem quæ in 2. *lemmate*, & *ducatur recta* EB *ab extremitate diametri* AE *ad terminum lateris* AB *diametro proximi:*

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſpærico DAF *inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter* EB & *ſegmenti axem* AO.

Demonſtratio plane eadem quæ præcedentis: ſed pro P. 16. citetur P. 17.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Superficies conicæ ſphæra inſcriptæ, in ſpæra ſuperficiem deſinunt.

Data ſit ſuperficies quantumvis parva X. Manifeſtum Fig. 18.
eſt intra ſphæricam ſuperficiem ACEG dari aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quam ſit X. Ambarum plano ſectarum per centrum, maximi circuli ſint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus, [*ſed in fig.* 18. *arcus quadrantalis AC triſecatur, quod etiam fieri poſſe patet ex cor.* 3. *p.* 15. *l.* 4.] & ſic deinceps, relinquetur *(a)* tandem arcus AB minor arcu AN. Huic ſi ſubtendatur recta AB, manifeſtum eſt eam non pertingere ad peripheriam PDML, eſſeque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo CAGE inſcriptæ, [*cujus latera quaternarius metiatur*, &] cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare ſi circa diametrum AE in orbem agantur omnia, patet ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illa ſint *(b)* majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies DPLM, deficit a ſuperficie ſphærica ACEG quantitate minori quam ſit data X; multo magis ſuperficies conicæ ab eadem ſphærica ACEG, deficient quantitate minori quam ſit data X, ac proinde *(c)* in ACEG ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex lem.* 2. *ſchol. poſt* 11. *l.* 6.

(b) *Per axio.* 3. *hujus.*

(c) Per def. 6. *l.* 12.

PROPOSITIO XXI.

Conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico DAF inſcriptæ, in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt. Fig. 20.

Demonſtrabitur eodem fere ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 19. *Demonſtratum eſt propoſ. 18. circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum AE, & rectam EB, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphęrę inſcriptis.*

(a) Vide Ref. 6.l.11.) *Dico hunc circulum deſinere* (a) *tandem in circulum, cujus radius eſt AE ſphęrę diameter.*

Nam ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producant ſuperficies,) patet latus AB fieri tandem quavis dacta recta minus, ac proinde ſubtenſam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit, ut differentia ipſarum AE, BE etiam fiat quavis data minor. Ergo multo magis media proportionalis inter AE & BE, quæ ſemper major eſt quam BE, differet ab AE tandem defectu minor quocumque dato. Ergo etiam circulus cujus ſemidiameter eſt media inter AE & BE, a circulo cujus radius eſt AE, tandem differet defectu minori quocumque dato: hoc eſt, in (*b*) ipſum deſinet. Quod erat demonſtrandum.

(b) Per def. 6. l. 11.

Hæc per ſe ſatis clara, non eſt neceſſe operoſius demonſtrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 20.

Demonſtratum eſt propoſ. 19. circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter EB & AO ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ DAF inſcriptis.

Dico hunc circulum deſinere in circulum, cujus radius eſt recta AD, a ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli DQFN, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam quia jam ex præced. demonſt. liquet EB deſinere tandem in AE, patebit quoque mediam proportionalem inter

ter EB & AO, deſinere tandem in mediam proportionalem inter AE & AO; hoc *(a)* eſt, in ipſam AD. Manifeſtum eſt igitur & circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter EB & AO etiam deſinere in circulum radii AD. Quod erat demonſtrandum. *(a) Per cor. 2. p. 8. l. 6.*

Lemma ad ſequen.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propoſ. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5. [*vel ex cor. 3. p. 2. l. 12.*

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 19.

CUjuſcumque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ.

Hoc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expedite demonſtrabimus hunc in modum.

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur; quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas ſuperficies ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque EB. Demonſtratum jam ſupra *(b)* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum AEB, hoc eſt, cujus radius eſt medius proportionalis inter AE & EB. Atque hoc ſemper eveniet, inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inſcriptæ conicæ ſuperficies *(c)* tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus vero cujus radius eſt medius inter AE & EB, deſinat *(d)* in circulum cujus radius eſt AE; ipſa quoque ſphærica ſuperficies *(e)* æqualis erit circulo radii AE, hoc eſt, *(f)* quadruplo maximi circuli ACEG. Quod erat demonſtrandum.

[b) *Per 18. hujus.*
(c) *Per 20. hujus.*
(d) *Per 22. hujus.*
(e] *Per 2. hujus.*
(f) *Per lem. prec.*

Viam, qua in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenus uſi ſumus, Archimedea multo breviorem & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legit.

Corollaria.

1. EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirum cujus ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſive cujus diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

[Cor. 2.

Digitized by Google

[Cor. 2. *Hinc etiam, & e p. 2. l. 12. cum p. 15. l. 5. ſphærarum ſuperficies ſunt inter ſe in ratione duplicata radiorum qui in ſphæris ſunt.*]

Scholium.

Expedita jam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ, principis inter omnes curvas. Duplex eſt modus.

1. Menſuretur circulus ſphæræ maximus, (ut traditur in ſcholio poſt P. 6. hujus,) & multiplicetur per 4. Ut ſi maximus orbis terræ circulus inventus ſit continere quadrata milliaria unius horæ ſive Belgica 5, 940000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23, 760000. quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.

2. Diameter ſphæræ multiplicatæ per circumferentiam maximi circuli, exhibet ſphæræ ſuperficiem. Ut ſi terræ diametro dentur milliaria unius horæ $2750\frac{1}{7}\frac{4}{1}$, atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri, omiſſa fractione, multiplicati per invicem, dabunt rurſum quadrata milliaria unius horæ, 23, 76000. totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.

Demonſtratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus: rectangulum enim ſub diametro ſphæræ, & maximi circuli circumferentia, per dictum corol. eſt quadruplum maximi circuli.

[De *numeris in hoc ſcholio memoratis vide quæ monuimus in ſchol. poſt p. 6. hujus.*]

PROPOSITIO XXV.

Fig. 10. *Cujuſcumque portionis ſphæricæ (DAF) ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus radius eſt recta (AD) a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DOFN) qui portionis eſt baſis.*

[1. *Pars.*] Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem AO, figura æquilatera & parilatera baſi dempta, [*cujus nullum latus ſit axi* (a) *parallelum;*] quæ circa AO in orbem acta, portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur quoque recta EB, ut (*b*) ſupra. Omnes conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico jam inſcriptæ æquantur (*c*) circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſegmenti axem AO. Atque hoc, multiplicatis in infinitum inſcriptionibus, ſemper continget. Quare, cum & conicæ ſuperficies ſegmento inſcriptæ, deſinant (*d*) in ſphæricam ſegmenti ſuperficiem,

(a) *Vide ſch. p. 17. hujus.*
(b) *In 18. & 19. hujus.*
(c) *Per 19. hujus.*
(d) *Per 12. hujus.*

perficiem, & circulus cujus radius inter EB & AO medius eſt, deſinat (*a*) in circulum radii AD; etiam (*b*) ſphæricæ portionis ſuperficies DAF, circulo radii AD æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 23. hujus.
(b) Per 2. hujus.

[2. *Pars. Sit ED recta a vertice E portionis ſphæricæ minoris DEF ad circumferentiam baſeos ducta, & jungatur AD. Propter* (c) *angulum ADE rectum*, (d) *erit circulus radio AE æqualis ſummæ circulorum radiis AD, ED reſpective deſcriptorum. Sed circulus radio AE* (e) *æquatur toti ſuperficiei ſphæricæ, & circulus radio AD* (f) *æquatur portionis majoris DAF ſuperficiei. Ergo circulus radio ED, portionis minoris DEF ſuperficiei æquabitur.*]

(c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor. 8. p. 2. l. 12.
(e) Patet eodem. p. 24. hujus.
(f) Per 1. Partem huj. prop.

Hoc alterum eſt ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, via multo, quam ipſe, breviori ac clariori jam demonſtravimus.

[Cor. *Hinc datis ſphæræ diametro AE, & portionis ſphæricæ DAF axe AO, (vel datis axe AO, & OD baſis radio,) habetur AD radius circuli, qui portionis ſphæricæ ſuperficiei æquatur, atque inde dabitur ſuperficiei portionis ſphæricæ dimenſio. Cum enim ſint* (g) $AE, AD, AO \div\div$, *erit* (h) $AD = \sqrt{\overline{AE \times AO}}$; (*vel propter triangulum rectangulum AOD, erit* (i) *etiam* $AD = \sqrt{\overline{AOq + DOq}}$.) *Si igitur fiat 113 ad 355, ut AD ad terminum quartum; hic terminus per AD multiplicatus, dabit aream, portionis ſphæricæ ſuperficiei æqualem. Patet ex hac, & Schol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 5.*]

(g) Per cor. 2. p. 8 l. 6.
(h) Patet ex 17. l. 6.
(i) Patet ex 47. l. 1.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 21.

Cylindri recti ſphęrę circumſcripti (HPSV) ſuperficies, ęqualis eſt ſuperficiei ſphęrę.

Et ſi cylindrus ac ſphęra ſecentur planis ad axem (BG) *rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricę ſegmenta, ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphęricę ęqualia.*

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP æquale eſt (*k*) PS diametro baſis; erit cylindrica ſuperficies HS, quadrupla (*l*) baſeos, hoc eſt, maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ; cujus cum etiam (*m*) quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonſtrandum.

(K) Per hyp.
(l) Per cor. p. 11 hujus.
(m) Per 24. hujus.

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG (*n*) rectus eſt in ſemicirculo; ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit (*o*) BO media proportionalis inter GB &

(n) Per 31. l. 3.
(o) Per cor. 2. p. 8. l. 6.

Digitized by Google

GB & BC, hoc eſt, inter IT & HI. Ergo circulus radii
(a) Per 21. huius. BO (*a*) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ HT. Sed idem
(b) Per prec. circulus æqualis (*b*) eſt etiam ſegmento ſuperficiei ſphæricæ OBK. Æquales igitur ſunt ſuperficies, cylindrica HT, & ſphærica OBK.

Deinde, quia eodem modo oſtenditur cylindrica HX æquari ſphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ ſphæricæ QOKR, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

[Coroll. *Hinc ſuperficies cylindri ſphæra circumſcripti, eſt dupla baſium.*]

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 21. *SEgmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diviſæ, eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos recta.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuper-
(c) Per prec. ficiei ſegmenta OBK, QOKR, MQRN, &c. (*c*) æqualia cylindricis, HT, IX, LN, &c. Atqui hæc eamdem inter
(d) Per 13. l. 12. ſe rationem habent, (*d*) quam axeos ſegmenta BC, CD, DA, &c. Ergo & illa. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

EX hac inoteſcit proportio zonarum & climatum inter ſe. Sunt enim ad invicem ut ſegmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula ſinuum.

Ex eadem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nam quia & tota ſphæræ ſuperficies nota eſt ex ſcholio prop. 24. & ſegmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Ceterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ ſequuntur, omnia ſingularia atque admiranda ſunt, planeque digna, ad quæ intelligenda, Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

Fig. 22. SI ſphæram tangat planum (QN in O,) recta (AO) ex centro ad contactum ducta, eſt plano tangenti perpendicularis.

Sece itur

Secentur planum tangens QN & ſphæra, per [*centrum A &*] tactum O, duobus planis [*quorum ſectio communis erit AO, &*] quæ in ſphæra quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingant (*a*) in O. Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis eſt ad utrumque IO, CO, ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per def.* 2 *l.* 3.

[Coroll. *Hinc colligimus globum perfecte politum, in plano horizontali perfecte polito QN Tellurem in O tangente poſitum quieſcere non poſſe, niſi in puncto contactus O collocetur. Ex gr. Globus ad I poſitus, ob gravitatem ſuam & plani declivitatem deſcendet verſus O. Nam ducta AI, in triangulo rectangulo AOI, latus AI angulo recto oppoſitum, majus eſt* (b) *quam AO, adeoque globus ad I magis diſtat a centro quam ad O, & proinde globus ad I quieſcere nequit, ſed verſus O deſcendet: Neque aliter fluidorum deſcenſum, atque in ſuperficiem ſphæricam conformationem probamus.*

(b) *Per* 19. & *cor.* 5 *p.* 32 *l.* 1.

Lemma ad conſect. 3. in ſchol. ſeq. *Sint O, P, Q trium circulorum peripheriæ, & R, S, T eorum radii reſpective; ſitque R—S=T: Erit O—P=Q.*

Nam O : P :: (c) *R : S; & P : Q :: S : T.* (d) *Ergo O—P : Q :: R—S : T. Sed R—S* (e) *= T. Ergo O—P* (f) *= Q.*

(c) *Per* 7. *hujus.* (d) *Per cor.* 2. *p.* 22 *l.* 5. (e) *Per hyp.* (f) *Per def.* 5. *l* 5.

Scholium. *Cum plana per centrum terræ tranſeuntia, in quibus omnia ad horizontem recta conſiſtunt, circulos magnos & æquales in terræ ſuperficie generent, lauta nonnulla conſectaria ex auctore noſtro in Aſtronomia ſua* (g) *opponemus, quę ex circulorum natura facillime poſſunt intelligi.*

(g) *Lib.* 1. *cap.* 2. *num.* 6.

1. *Si qua ſui parte ſuperficies terrę eſſet perfecte plana, non magis poſſent homines in ea recti conſiſtere quam in clivo montis: excepto nimirum contactus puncto.* Fig. 37. l 3.

2. *Caput viatoris plus itineris conficit quam pedes: item qui eques eamdem viam proficiſcitur, plus quam qui pedes: Item in navi, pars ſuprema mali plus vię percurrit quam inferior.*

3. *Si quis totum orbis circumductum peragraſſet, iter ejus a capite confectum ſuperaret iter confectum a pedibus peripheriarum differentia, quę* (h) *ęqualis eſt circumductui circuli cujus radius eſt ipſa hominis ſtatura.*

(h) *Per lem. ad hoc conſ.* 3.

4. *Vas aqua plenum ſi ad perpendiculum efferatur in altum, continuo aliquid ex eo effluet, & tamen manebit plenum: quia ſcilicet, ſuperficies aquę in partem majoris ſphęrę continuo cōprimetur. Imo ſi vas in altum* ſine termino *efferatur, ſuper-*

ficies aquæ in eo contentæ deſcendet ſine termino *verſus planum per margines ductum ; neque tamen umquam ad planum iſtud perveniet.*

5. *Si vas aqua plenum recta deorſum feratur, quamvis nihil effluat, tamen deſinet eſſe plenum: quia ſcilicet aquæ ſuperficies in partem minoris ſphæræ continuo tumeſcet. Ex quo ſequitur,*

6. *Unum idemque vas plus aquæ continere in pede montis quam vertice; plus etiam in cella ſubterranea quam in cubiculo. Quibus adde,*

Fig.27.l.3. 7. *Duos funiculos, de quibus duo globuli ferrei in perpendiculo penduli ſint, [& proinde ædificiorum muros juxta perpendicula erectos] non eſſe inter ſe parallelos: ſed partes radiorum terræ, in centro coeuntium.]*

PROPOSITIO XXVIII.

Fig.23.25. & 24. *Omnis ſphæra æqualis eſt cono (ZO) cujus altitudo (KO) par eſt radio ſphæræ, baſis vero (Z) ſuperficiei ſphæræ æqualis.*

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod polyedrum, cujus ſolidi anguli novis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto, orietur aliud corpus polyedrum ſphæram continens, minus priore, & pluribus conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tengentibus compoſitam. Si polyedri hujus ſolidi anguli novis planis tangentibus iterum abſcindantur, & tertii polyedri inde nati ſimiliter; atque ita in infinitum: fiet tandem ut & polyedrum excedat ſphæram ſolido minori quocumque dato, & ſuperficies eius ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, ſine termino & minora, & plura erunt) compoſita, ſphæricam ſuperficiem excedat quoque, plano minori, dato quocumque. Quod utrumque, licet demonſtrari poſſet, tamen quia per ſe ſatis clarum, poſtuletur ſtudio brevitatis. His ita conſtitutis, quæſitum ita concludemus.

Polyedrum jam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphæræ, baſes vero ſunt plana tangentia, quæ polyedri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus ductæ, ad plana (a) ſingula perpendiculares ſunt; erunt omnium pyramidum, quibus conſtat polyedrum, æqualis altitudo, ipſe nimirum AB radius ſphæræ. Si jam igitur planum

(a) Ter. tem. prec.

Digitized by Google

num X ponatur æquale ſuperficiei ipſius polyedri, ſuperque eo recta ſit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem ſphæræ radio AB, manifeſtum eſt (a) omnes pyramides ſupra dictas, hoc eſt, totum polyedrum, æquari pyramidi XN. Ad eumdem modum reliqua omnia polyedra ſphæram includentia, quæ ex truncatione perpetua ſolidorum angulorum, alia atque alia naſcentur in infinitum, ſemper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræſentatis) quarum altitudines (MN) ſunt radius ſphæræ, baſes vero (X) æquales ſuperficiebus polyedrorum, ſphæram ambientibus. Quare cum tandem, & polyedra (ut dixi ſupra) in ſphæram; & pyramides XN (ut mox oſtendam) in conum ZO deſinant; etiam (b) ſphæra cono æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex de n. p. 6. l. 12.*

(b) *Per 1. hujus.*

Quod autem pyramides XN (c) deſinant in conum, ſic oſtendo. Polyedrorum ſuperficies deſinunt in ſphæræ ſuperficiem, ut poſtulatum ſupra. Atqui baſes X pyramidum XN, ſemper æquales ponuntur ſuperficiebus polyedrorum; & Z baſis coni ZO per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ: ergo etiam baſes X deſinent in baſim Z; ac proinde, cum pyramides XN ſint ad conum ex hyp. æque altum, ut (d) baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent.

(c) *Vide def. 6. l. 12.*

(d) *Per cor. p 11. l. 12.*

Demonſtratio jam allata hujus propoſitionis & ſequentis, penitus diverſa eſt ab ea, qua uſus eſt Archimedes; quæ quidem valde ſubtilis & ingenioſa eſt, ſed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta, & propoſitiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipſum vero theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis ſphæra quadrupla eſt coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphæræ, altitudinem vero radium.

[Coroll. *Hinc hemiſphærium duplum eſt coni baſim habentis æqualem maximo ſphæræ circulo, altitudinem vero ejuſdem ſphæræ radio æqualem.*

Tacquetus hoc corollarium in prop. 30. exhibet, ſed in ejus demonſtratione aſſumit id quod ipſa propoſitione vix clarius eſſe videtur, nempe, hemiſphærium æquale eſſe cono, habenti pro altitudine radium, & pro baſi circulum ſuperficiei hemiſphærii æqualem. *Quod quidem ex hac prop. 28. facile deducitur: verum tamen & ipſa prop. 30. ex eadem hac p. 28. pari facilitate deduci poterat. Aut igitur oportet prop. 30. huc transferri, & in corollarium prædictum mutari, aut ſaltem, ſi propoſitio memorata locum ſuum teneat, paulo aliter demonſtrari debet.*]

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate, figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſive tertia ſemidiametri, multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem jam notam per ſcholium prop. 24. proveniet ſphæræ ſoliditas.

Inventa ſit ſphæræ terreſtris ſuperficies continere quadrata unius horæ milliaria 23, 760000. & ſemidiameter eſto milliarium horariorum 1375. cujus tertia pars eſt $458\frac{1}{3}$. Multplica 458. omiſſa fractione, per 23, 760000. provenient 10882,080000. cubica unius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ. [*De hiſce vero numeris, vide notata ad ſchol. p 6. hujus.*]

(a) Per hanc 28. (b) Per def. p.6. hujus.

Cum enim ſphæra ſit æqualis (*a*) cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis vero ſuperficies ſphæræ; coni autem ſoliditas (*b*) producatur ex parte tertia altitudinis, (hoc eſt, radii ſphæræ) ducta in baſim, (hoc eſt, in ſphæræ ſuperficiem;) etiam ſphæræ ſoliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in ſuperficiem.

[*Datis autem diametro & circumferentia, habebitur ſphæræ ſoliditas, ſi pars ſexta circumferentiæ ducatur in diametri quadratum: vel aliter, ſi diviſio diametri quadrato per 6, quotiens per circumferentiam multiplicetur. Idem enim bis modis orietur factum, ac ſi diametri ſexta pars in ſphæræ ſuperficiem duceretur.*]

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 26.

OMnis ſector ſphæræ, æqualis eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis vero ſectoris ſpherica ſuperficies.

Eſto primum ſector (AECG) hemiſphærio minor. Intelligatur ſectori circumſcriptum eſſe polyedrum corpus rectilineum. Si cetera ratiocinatio omnis ad eumdem modum inſtituatur ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæſitum. Id ſolum oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem polyedri ex planis ſphæricam ſuperficiem ECG undequaque tangentibus compoſitam, eſſe majorem ſuperficie ECG. Quod ita fiet. Cogitetur ſuperficiei ECG apponi alia æqualis & ſimilis, planis tangentibus eodem

eodem prorſus modo cincta quo prior. Erit jam tota (*a*) ſuperficies ex planis compoſita, major tota ſphærica. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita, dimidia ſphærica ECG major erit. (a) *Patet ex ax. 3. hujus.*

Eſto deinde ſector (AEBG) major hemiſphærio. Uterque ſector ſimul ſumptus, æqualis (*b*) eſt cono cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies; hoc eſt, (*c*) duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes vero pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis ECG, EBG. Atqui ſectorum unus AECG hemiſphærio minor, per 1. partem æquatur cono cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies reliqua EBG. Quod erat demonſtrandum. (b) *Per præc.* (c) Patet *ex* 41. *l.* 12. & 24. *l.* 5.

Corollarium.

CUM ſuperficies ECG ſit æqualis (*d*) circuli radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG; erunt ſectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes vero circuli radiorum CG & BG. [d] *Per* 25. *hujus.*

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæræ; ſectorum quidem, ſi multiplicetur (*e*) tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27. [*vel ex cor p.* 25.] ſive per circulum radii CG, vel BG: ſegmentorum vero, ſi menſuretur conus EAG, & a ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur; ſi major, eidem adjiciatur. *Fig.* 26. (e) Patet *ex ſchol. p.* 9. *hujus.*

Segmentum (MQRN) quod inter duos circulos ſive parallelos ſive non parallelos interjicitur, menſurabis, ſi ſegmenta QBR & MBN jam nota auferantur ab invicem. *Fig.* 21.

PROPOSITIO XXX.

H*Emiſphærium (EOBD) coni (EBD) eamdem ſecum baſim & altitudinem habentis, duplum eſt.* Fig. 27.

Conus cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica EOBD, altitudo autem radius AB, eſt ad conum EBD, (*f*) ut baſis [f] *Per* 11. *l.* 10.

ad baſim, hoc eſt, ut ſuperficies hemiſphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cum ſuperficies hemiſphærica
(a) Per 24. huius. EOBD dupla (a) ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi ha-
(b) Sequitur ex 28. huj. bens ſuperficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus eſt coni EBD. At qui hemiſphærium æquatur (b) cono habenti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphæricam EOBD. Ergo etiam hemiſphærium coni EBD duplum eſt, Quod erat demonſtrandum.

(c) Per 11. l. 12. [Aliter, *Cum coni equè lati inter ſe (c) ſint ut baſes, erit conus cujus altitudo eſt radius ſphere, & baſis equalis eſt ſuperficiei ſphere, ad conum ejuſdem altitudinis, ſuper circulo*
(d) Per 24. huius. (e) Per 28. huius. *ſphere maximo pro baſi, ut* (d) *4 ad 1. Et cum conus prior ſit ſphera* (e) *equalis; erit ergo ſphere ad conum poſteriorem, ut 4 ad 1; ac proinde eſt hemiſpherium ad conum poſteriorem, ut 2 ad 1. Sed conus poſterior eamdem habet altitudinem & baſim cum dicto hemiſpherio.*

Hemiſpherium igitur duplum eſt coni eamdem ſecum baſim & altitudinem habentis.

Corol. *Conus EBD, hemiſpherium EOBD ac cylindrus EK, eamdem baſim & altitudinem habentia, ſunt inter ſe ut 1. 2. 3. Nam per hanc prop. conus eſt ad hemiſphærium ut 1. ad 2. Et per 10. l. 12. eſt idem conus ad cylindrum ut 1. ad 3.*]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 28. *Sphæra ſit diviſa in duo ſegmenta ILBG, ISKH, plano IQGT, per centrum A non tranſeunte: diameter autem plano ſecanti recta, ſit BOK.*

Ut altitudo OB ſegmenti ILBG eſt ad radium ſphere AB, ita OK altitudo ſegmenti ISKG fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo ſegmenti ISKG eſt ad radium AK ſeu AB, ita altitudo OB ſegmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines ſunt ON, OD, baſis vero communis IQGT, ſegmentis ſphericis ſunt equales.

2. Segmentorum eadem eſt proportio, que rectarum DO, NO.

3. Segmentum ISKG eſt ad maximum ſibi inſcriptum co-

conum IKG, ut NO ad KO; & ſegmentum ILBG eſt ad ſibi inſcriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO.

Pars 1. Sphæra & coni ſecentur plano per diametrum BK. Producentur in ſphæra circulus maximus BLKG, in conis vero triangula BIG, IKG. Et quia BOK diameter (*a*) recta eſt circulo QT, erit angulus IOB (*b*) rectus. Angulus quoque BIK (*c*) in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo BIK ab angulo recto ducta eſt IO perpendicularis in baſim BK, erit BI ad IO, ut (*d*) BK ad KI. Ergo ratio duplicata BI ad IO æqualis eſt rationi duplicatæ BK ad KI; hoc eſt, (quia BK, KI, KO (*e*) ſunt tres proportionales,) æqualis rationi BK ad KO.

Deinde quia eſt ut OK ad radium AB, ita (*f*) OB ad BD; erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad OK: & permut. DB ad BA, ut BO ad OK: & compon. DA ad BA, ut BK ad OK. Quoniam igitur jam oſtendi rationem BK ad OK duplicatam eſſe rationis BI ad IO, ac proinde æqualem (g) rationi circulorum radiis BI, IO deſcriptorum; erit quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. Igitur conus ſub altitudine DA, & baſi circulo radii IO, hoc eſt circulo QT, æqualis eſt (*h*) cono ſub altitudine BA, & baſi circulo radii BI, hoc eſt (*i*) ſectori ſphærico AIBG. Quare ſi tam ſectori AIBG, quam cono ſub DA & circulo QT, addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum ſphæricum ILBG æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui fit ſub baſi QT & altitudine DA, alter IAG, ſub eadem baſi QT, & altitudine OA. Sed hi duo coni (*k*) conficiunt conum IDG. Ergo ſegmentum ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum ISKG æquale cono ING eo ſolum mutato, ut conus IAG qui prius addebatur, jam auferatur

[*Quia enim eſt* (l) KI : IO :: KB : BI; (m) *erit* KIq. IOq :: KBq. BIq (n) :: KB : BO *Sed per hyp. eſt* NK : AK = KA :: KO : OB. *et comp.* NA . AK :: KB : BO :: (o) KIq : IOq :: (p) *circ. rad.* KI : *circ. rad.* IO = *circ.* QT. *Ergo conus ſub altitud.* NA *& baſi* QT, (q) *æquatur cono ſub altit.* AK *& circ. rad.* KI, *hoc eſt,* (r) *ſectori ſphær.* AIKG. *Sed conus ſub alt.* NA *& baſi* QT, (ſ) *æqualis eſt duobus conis ſimul ſumptis, uni quidem ſub altit.* NO *& baſi* QT, *& alteri ſub alt.* OA *& eadem baſi* QT, *hoc eſt, conis* ING, IAG; *Et ſector ſph.* AIKG *æqualis eſt ſegm. ſphær.* ISKG *& cono* IAG *ſimul ſumptis. Auferatur*

(a) Per hyp.
(b) Per def. 3. l. 11.
(c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(e) Per cor. 2. p. 8. l. 6.
(f) Per hyp.
(g) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(h) Per 15. l. 12.
(i) Per cor. 9. 19 hujus.
(k) Patet ex 14. l. 12. & 24. l. 5.
(l) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(m) Per 34. l. 5. & ſch. p. 20 l. 6.
(n) Per cor. 2. p. 8. l. 6. & def. 10. l. 5.
(o) Per ant.
(p) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(q) Per 15. l. 12.
(r) Per cor. p. 20. hujus.
(ſ) Patet ex 14. l. 12. & 24. l. 5.

feratur utrinque conus IAG, & relinquetur con. ING = ſegm. ſphær. ISKG. Q.E.D.]

Pars 2. Patet ex prima. Nam coni IDG & ING ſunt inter ſe (*a*) ut DO & NO. Ergo & ſegmenta ILBG, ISKG conis illis æqualia, ſunt inter ſe, ut rectæ DO, NO.

(a) Per 14. l. 12.

Pars 3. Patet ſimiliter ex prima. Nam conus IDG eſt ad conum IBG, (*b*) ut DO ad BO. Ergo & ſegmentum ILBG, cono IDG æquale, eſt ad conum IBG, ut DO ad BO. [*Eodem modo oſtendetur eſſe ſegmentum ISKG ad conum IKG, ut NO ad KO.*]

(b) Per eamd.

Scholium.

Ex prima parte hujus theorematis, habetur alia, eaque faciliima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio, ſi nimirum coni IDG, ING menſurentur; quod fiet, ſi (*c*) tertiæ partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.

(c) *Vide ſch. poſt. 6. hujus.*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 27.

Cylindrus rectus (GK,) ſphæræ, cui circumſcribitur, & ſoliditate & ſuperficie tota ſeſquialter eſt.

Communis ſphæræ ac cylindri axis eſto BQ, conus vero maximus hemiſphærio EOBD inſcriptus ſit EBD. Quia cylindrus EK, (ſemiſſis totius GK) triplus (*d*) eſt coni EBD; hemiſphærium vero (*e*) ejuſdem coni duplum, patet cylindrum EK eſſe ad hemiſphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus GK eſt ad totam ſphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

(d) Per 10. l. 12.
(e) Per 30. hujus.

Deinde quia cylindri latus KN eſt æquale baſis diametro GN, erit ejus ſuperficies abſque baſibus (*f*) quadrupla baſeos MI, ac proinde cum baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſextupla baſeos MI, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri GK ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6. ad 4. ſive ut 3. ad 2. Quod erat alterum.

(f) Per cor. p. 12. hujus.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate & tota ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

[Cor. 1. *Cylindrus rectus ſphæræ circumſcriptus, ipſa ſphæra, & conus ejuſdem cum cylindro baſis & altitudinis, ſunt inter ſe ut 3. 2. 1. Nam per hanc prop. cylindrus eſt ad ſphæram ut 3. ad 2; & per 10. l. 12. eſt cylindrus ad conum ut 3. ad 1. Ergo, &c. Atque in eadem ratione ſunt, ſuperficies cylindri hemiſphærio conſcripti cum baſi hemiſphærium tangente, ſuperficies hemiſphærii, & baſis utrique communis. Cum enim tam cylindrica ſuperficies quam hemiſphærica, ſit* (g) *dupla baſeos; erit*

(g) Per 26. hujus. cum cor.

erit cylindrica cum baſi ad baſim alteram, ut 3. *ad* 1. *Unde liquet propoſitum.*

Cor. 2. *Hinc cylindrus* GK *dempta ſphæra, (ſive ſolidum cylindricorum ſphæro-cavum, ſuperficie tota cylindri externe, & ſuperficie ſphærica concava interne terminatum,) æquatur cono inſcripto* GBN. *Cum enim cylindrus ſit ad inſcriptam ſphæram ut* 3 *ad* 2, *erit ad ſolidum cylindricum ſphęro-cavum ut* 3 *ad* 1, *hoc* (a) *eſt, ut idem cylindrus ad conum* GBN; *ac proinde ſolidum illud cono* GBN *ęquale erit.*

(a) Per 10. l. 12.

Cor. 3. *Solidum cylindricum hemiſphæro-cavum, (hoc eſt, cylindrus* EK *dempto hemiſphęrio inſcripto* EOBD) *ęquale eſt cono inſcripto* EBD. *Etenim tam ſolidum, quam conus, pars eſt* (b) *tertia cylindri* EK.

(b) *Patet eodem modo quo cor.* 2.

Cor. 4. *Si conus* HAV, *cylindro* NH *inſcriptus, verticem habeat in centro* A *hemiſphęrii* MOBN, *cylindro etiam inſcripti, & baſim* HV *hemiſphęrii baſi parallelam, & hemiſphęrium in ipſius vertice* B *tangentem; e cylindro autem eximatur hemiſphęrium; relinquetur ſolidum cylindricum hemiſphęro-cavum, cono* HAV *ſuper eadem cum cylindro baſi* HV *ęquale. Patet ex cor.* 3.

Fig. 21.

Cor. 5. *Si ejuſmodi conus & ſolidum ſecentur plano quovis* LX *baſi* HV *parallelo; fient in cono circulus* αε, *in ſolido planum annulare* QLXR, *ſibi invicem ubique ęqualia. Nam ducto ſphęrę radio* AR, *erit* ARq (c) = ADq + DRq. *Sed propter* AB, BV *ęquales,* (d) *erunt* AD, Dε *ęquales:* (e) *ęquantur etiam* AR, AN, DX *inter ſe. Ergo* DXq = Dεq + DRq; *& circulus radio* DX (f) *ęquatur circulis qui radiis* DR, Dε *reſpective deſcribuntur, ſimul ſumptis. Aufer utrinque circulum radio* DR *deſcriptum, & reſtabit planum annulare* QLXR *æquale circulo habenti radium* Dε.

(c) Per 47. l. 1.
(d) Per cor. 1 p. 4. l. 6.
(e) Per def. 5. l. 12. & p. 34 l. 1.
(f) Per cor. 2. p. 2. l. 12. & p. 24. l. 5.

Cor. 6. *Segmenta quævis coni* HAV *& ſolidi cylindrici hemiſphæro-cavi, planis baſi parallelis intercepta, ſunt æqualia. Nam conus ſolido æqualis eſt; & ſectio circularis* αε *coni, plano annulari* QLXR *ſolidi ſemper æquatur. Si igitur planum* LX *feratur ſurſum vel deorſum, motu baſi parallelo, generabit ubique coni & ſolidi cylindrici æqualia ſegmenta.*

Cor. 7. *Ex menſura* (g) *igitur coni* HAV *habetur dimenſio ſolidi hemiſphæro-cavi; & ex menſura* (h) *coni truncati* OαεK, *habetur dimenſio ſegmenti annularis* QLIORXTK *iiſdem planis* IT, LX, *intercepti. Atque hinc etiam alia methodus exoritur ſegmenta quævis ſphærica dimetiendi.*

(g) Per ſch. p. 6. huius.
(h) Per eand.

Sic ſi quæratur menſura ſegmenti QOKR *parallelis planis* QR, OK *intercepti; e cylindro* LT *deducatur conus truncatus* OαεK: *& ſi quæratur ſegmentum* MQRN *a parallelis planis* MN, QR *terminatum; e cylindro* MX *ſubducatur conus* αAε.

Scholium.

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes, argumento eſt, quod tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortaſſe, inter alia tam multa & præclara inventa ſua, hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium, prop. 13. 14. 15. ſed & ipſa in ſphæra aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum ſe ambientem, (qui neceſſario æquilaterus erit, eſt tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 2. ad 3. ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter & ſuperficie eam habere proportionem, quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & ſphæra repertam, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphæræ natura mirabilis amplius innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa, ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 29. S*Uperficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti.*

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, a quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto AKLD, ducaturque AL, diameter quadrato & ſphæræ communis. Quoniam quadratum AL par (*a*) eſt quadratis æqualibus AK, KL, erit duplum unius AK. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus (*b*) eſt circuli, cujus diameter AK, circuli nempe CN. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla (*c*) eſt circuli, cujus diameter AL: is enim eſt maximus ſphæræ circulus, cum AL ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli CN. Sed quia LK, KA, (*d*) æquales ſunt, cylindrica ſuperficies ACL quadrupla (*e*) eſt circuli CN. Ergo cum ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat damonſtrandum.

(a) *Per 47. l. 1.*
(b) *Patet ex cor. 5 p. 2. l. 12.*
(c) *Per 24. hujus.*
(d) *Per hyp.*
(e) *Per cor. p. 12. hujus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 29. S*Phæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4. ad 3.*

Ponan-

Ponantur eadem quæ demonſt. præced. Quoniam cylindri latus LK & baſis diameter AK (*a*) æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica CL (*b*) quadrupla baſis CN, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim CN & SL eſt ut 6. ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim CN, SL ut 8. ad 2. cum in præced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8. ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad totam cylindri CL ſuperficiem ut 8. ad 6. ſive ut 4. ad 3. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per hyp.*
(b) *Per cor. p. 12. hujus.*

Corollaria.

1. TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2. ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam ut 6. ad 4. per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 4. ad 3. per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 6. ad 3. ſive ut 2. ad 1.

[*Pari modo, ſphæra cylindro quadrato conſcripta ſuperficies dupla eſt ſuperficiei ſphæræ eidem inſcriptæ; ſicut & hæc dupla eſt circuli maximi ſphęrę conſcriptæ. Sunt enim* (c) *ſphęrica circumſcripta, tota cylindrica, & ſphærica inſcripta, ad maximum ſphæræ circumſcriptæ circulum; ut 4, 3 & 2. ad 1.*

(c) Per hanc & 32. cum 24. hujus.

2. *Superficies tota cylindri recti ſphæræ circumſcripti, ſuperficies ſphæræ, & ſuperficies tota cylindri æquilateri ſphæræ inſcripti, ſunt inter ſe in proportione muſica, hoc eſt, ut* (d) 6. 4. 3.

(d) Per 32. & hanc.

Tres autem quantitates ſunt in proportione muſica, ſi fuerit prima ad tertiam, ut eſt differentia primæ ac ſecundæ ad differentiam ſecundæ & tertiæ. Sic quia 6. 3 :: 6 — 4. 4 — 3 (:: 2. 1 ;) *erunt* 6, 4, 3 *in proportione muſica.*

Scholium. *Cylindrus ſphæra circumſcriptus eſt ad cylindrum ſimilem (nempe æquilaterum) eidem ſphæræ inſcriptum, ut in quadrato diameter ad lateris ſemiſſem; ſive (quod perinde eſt) ut circuli diameter ad ſinum graduum 45. Atque in eadem ratione eſt ſphæra cylindro æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem inſcriptam.* Fig. 29.

1. *Nam propter triangulum rectangulum æquicrure* AKL, *demiſſis perpendicularibus* KQ, QR, *triangula* AQK, ARQ *erunt* (e) *etiam rectangula & æquicrura. Unde* (f) AL, AK, AQ, AR ÷, & (g) AR = ½ AK. *Sed* AL *eſt diameter baſeos cylindri circumſcripti, &* AK *diameter baſeos inſcripti. Ergo, propter cylindrorum ſimilitudinem, erit* (h) *circumſcriptus ad inſcriptum in triplicata ratione* AL *ad* AK, *hoc* (i) *eſt, ut* AL *ad* (AR = ½ AK. *Sed* AL *eſt quadrati* DK *& circuli*

(e) Per 8. l. 6.
(f) Per cor. 2. p. 8. l. 6.
(g) Per n. 1. ſcho. p. 26. l. 1.
(h) Per 12. l. 12.
(i) Per def. 10. l. 5.

AGBK

AGBK diameter, & AK eſt ejuſdem quadrati eidem circulo inſcripti latus, ſive in circulo GK chorda gr. 90; ac proinde (a) $\frac{1}{2}$ *AK eſt ſinus gr. 45. Ergo cylindrus circumſcriptus eſt ad inſcriptum, ut in quadrato diameter ad lateris ſemiſſem, ſive ut circuli diameter ad ſinum graduum 45.*

(a) Per cor. 1. p. 3. l. 3.

2. *Et in eadem ratione eſt ſphæra cylindro æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem cylindro inſcriptam. Nam ſphæræ GK cylindro æquilatero ADLK circumſcriptæ diameter eſt AL, & ſphæræ inſcriptæ diameter æqualis eſt diametro baſeos cylindri, nempe ipſi AK. Sphæra igitur circumſcripta erit* (b) *ad inſcriptam, in triplicata ratione AL ad AK, hoc eſt, ut AL ad AR ſive* $\frac{1}{2}$ *AK. Q. E. D.*

(b) Per 18. l. 12.

Cor. ad ſchol. præced. *Sphæra eſt ad cylindrum æquilaterum ſibi inſcriptum, ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus; ſive, ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati circulo inſcripti.*

Nam per ſchol. præced. eſt ſphæra cylindro æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem inſcriptam, ut in quadrato dupla diameter ad latus, ſive ut quadrupla diameter ad duplum latus. Sed ſphæra inſcripta eidem cylindro eſt ad cylindrum, (c) *ut 2 ad 3, ſive ut duplum latus quadrati ad triplum ejuſdem quadrati latus. Ergo* (d) *ſphæra circumſcripta cylindro æquilatero eſt ad eumdem cylindrum, (hoc eſt, ſphæra eſt ad cylindrum æquilaterum ſibi inſcriptum,) ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus, ſive (quod perinde eſt) ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati eidem circulo inſcripti.*]

(c) Per 32. hujus.
(d) Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 29. vel 28.

Cujuſcumque portionis ſphæricæ ſuperficies (ILBG) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti (IBG,) eam rationem habet, quam coni latus (BG) ad baſis radium (GO.)

Quoniam portionis ILBG ſuperficies (*e*) æqualis eſt circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT, baſim nempe ſuam & coni, duplicata (*f*) rationis BG ad GO; hoc eſt, (*g*) rationis ſuperficiei conicæ IBG ad baſim eamdem QT. Ergo liquet (*h*) ſuperficiem ILBG eſſe ad ſuperficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG eſt ad baſim QT. Quare cum conica IBG ſit ad baſim QT, (*i*) ut BG ad GO, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam IBG ſibi inſcriptam ut BG ad GO. Quod erat demonſtrandum.

(e) Per 25. hujus.
(f) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(g) Per 14. hujus.
(h) Per def. 13. l. 5.
(i) Per 14. hujus.

[Cor.

[Cor. *Ex hujus prop. demonſtratione liquet, ſuperficiem coni maximi ſegmento ſphęrę inſcripti, eſſe mediam proportionalem inter ſuperficiem ſegmenti, & baſim utrique communem.*]

PROPOSITIO XXXVI.

H*Emiſphærii ſuperficies (EOBD) ad coni maximi ſive recti inſcripti ſuperficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem vero coni ſimilis circumſcripti, ut latus in quadrato ad diametrum.* Fig. 27.

1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta. Eſt enim portionis cujuſcumque, ac proinde & hemiſphærii ſuperficies EOBD ad conicam inſcriptam, ut BD ad DA. Eſt autem BADK quadratum, cujus diameter eſt BD, latus DA.

2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cujus centrum A) circumſcripti, eſto EBC: qua circa axem AB circumacta, gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum EC duplum (*a*) eſt quadrati EB, ſeu GI, etiam circulus diametri EC duplus (*b*) eſt circuli cujus diameter GI, hoc eſt circuli HGDI. Atqui (*c*) ſuperficies hemiſphærii cono EBC incluſi, ejuſdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri EC eidem ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cum ſuperficies conica EBC ſit ad (*d*) circulum diametri EC, baſim nempe ſuam, ut latus BE ad baſis radium EA; erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam, ut BE ad EA, hoc eſt, ut diameter in quadrato ad ſuum latus; [*ac proinde, ſuperficies hemiſphærica erit ad circumſcriptam conicam, ut latus in quadrato ad diametrum.*] Quod erat demonſtrandum. Fig. 10. l. 4.

(a) Per cor. 1. p. 47. l. 1.
(b) Per cor. 5. p. 2. l. 12.
(c) Per 24. hujus.
(d) Per 14. hujus.

Corol. *Si hemiſphærium cono rectangulo EBC circumſcribatur & inſcribatur; erit ſuperficies coni media proportionalis inter ſuperficiem hemiſphærii circumſcripti, & ſuperficiem inſcripti. Eſt enim, tam ſuperficies circumſcripta ad conicam, quam conica ad inſcriptam, ut in quadrato diameter ad latus.*] Fig. 10. l. 4.

PROPOSITIO XXXVII.

S*Phæra ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum, & ſoliditate & ſuperficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum.* Fig. eadem cum Fig. 13. l. 5.

Maxi-

Maximo ſphæræ circulo HGDI circumſcriptum eſto quadratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem acto, rhombus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 10. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R, (inſpice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata (*a*) rationis S ad R, hoc eſt, EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, ſive R ad S, hoc eſt EC ad EB; ac proinde (*b*) O eſt ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB: unde (*c*) O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis, intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi EBCF. Erit igitur ſphæra HGDI ad ſphæram EBCF in (*d*) ratione triplicata diametri GI (ſive EB) ad diametrum EC; hoc eſt, (quod jam oſtendi,) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum (*e*) ut 2 ad 1, hoc eſt, (quod oſtendi ſupra,) ut O ad R. Igitur ex æquo, ſphæra HGDI eſt ad eumdem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus, ut S eſt ad R, hoc eſt, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum.

(a) *Per def.* 10. *l.* 5.
(b) *Per ſch. p.* 20 *l.* 6.
(c) *Ex ſch. p.* 6. & 7. *l.* 4.
(d) *Per* 18. *l.* 12.
(e) *Per* 30. *hujus.*

[*Idem etiam ex unica fig.* 10. *lib.* 4. *inſpectione demonſtrabitur. Nam propter triangula rectangula* EGA, EAB, EBC, *communem angulum* E *habentia, erunt* (f) EG, EA, EB, EC ∺, *& ratio* EG *ad* EC *triplicata* (g) *erit rationis* EB *ad* EC. *Sed ſphæra rhombo conico inſcripta, eſt ad ſphæram eidem circumſcriptam, in triplicata* (h) *ratione diametrorum* EB, EC, *hoc eſt, ut* EG *ad* EC. *Et ſphæra circumſcripta, eſt* (i) *ad rhombum cui circumſcribitur, ut* 2 *ad* 1, *ſive ut* EC *ad* EA. *Ergo ex æquo,* (k) *ſphæra inſcripta eſt ad rhombum cui inſcribitur, ſeu, (quod idem eſt,) ſphæra eſt ad rhombum ſibi circumſcriptum, ut* EG *ad* EA, *hoc eſt, ut in quadrato* HG, *latus ad diametrum.*]

(f) *Per cor. poſt ſch. p.* 13. *l.* 6.
(g) *Per def.* 10. *l.* 5.
(h) *Per* 18. *l.* 12.
(i) *Per* 30. *hujus.*
(k) *Per* 22. *l.* 5.

Deinde ex ſecunda parte præcedentis patet hemiſphæril ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni [*circumſcripti*] EBC, ac proinde & totius ſphæræ [*HGDI*] ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo ſphæra tam ſoliditate quam ſuperficie eſt ad rhombum quadratum [*conicum ſibi circumſcriptum*] EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonſtrandum.

[Cor. 1. *Superficies ſphæræ rhombo conico quadrato circumſcriptæ, ſuperficies rhombi, & ſuperficies ſphæræ rhombo inſcriptæ, eamdem rationem continuant, eam nempe quam in quadrato habet diameter ad latus. Patet ex præcedenti & hac.*

Cor. 2.

Cor. 2. *Superficies ſphæra rhombo conico quadrato circumſcripta, dupla eſt ſuperficiei ſphæra eidem rhombo inſcripta. Ac ſimiliter, ſuperficies rhombi conici quadrati ſphæra circumſcripti, dupla eſt ſuperficiei rhombi ſimilis eidem ſphæra inſcripti. Cum enim per cor. 1. ſint ſuperficies ſphæra rhombo circumſcripta, ſuperficies rhombi, & ſphærica inſcripta, ut EC, EB, EA; & cum ſimiliter ſint ſuperficies rhombi ſphæra circumſcripti, ſuperficies ſphæra, & ea rhombi inſcripti, ut EC, EB, EA; Liquet in uroque caſu, ſuperficiem corpori cirmumſcriptam eſſe ad eidem inſcriptam, ut EC ad EA, ſive ut 2. ad 1.* Fig. 10. l. 4.

Cor. 3. *Rhombus conicus quadratus, eſt duorum mediorum proportionalium prior, inter ſphæram inſcriptam & circumſcriptam, ut in demonſtratione prima partis hujus prop. oſtenſum eſt. Nam inſcripta, rhombus, & circumſcripta, ſunt inter ſe, ut S. R, & O, in fig 13. l. 5. vel ut EG, EA, & EC, in fig. 10. l. 4.*

Cor. 4. *Patet quoque ex eadem demonſtratione, (vel etiam ex p. 30. hujus,) ſphæram rhombi conici quadrati ſibi inſcripti duplam eſſe.* Fig. 10. l. 4.

Cor. 5. *Sphæram ABCF rhombo conico quadrato circumſcripta, eſt ad ſphęram HGDI eidem rhombo inſcriptam, ut in quadrato diameter EC ad lateris EB ſemiſſem EG, uti ex demonſtratione memorata liquet. Atque in eadem ratione eſt rhombus conicus quadratus ſphęrę circumſcriptus ad ſimilem rhombum conicum eidem ſphęrę inſcriptum. Nam per hanc 37. eſt rhombus quadratus conicus ſphęrę circumſcriptus ad ipſam ſphęram, ut EC ad EB: & per cor. 4. eſt ſphęra ad ejuſmodi rhombum ſibi inſcriptum, ut 2. ad 1, ſive ut EB ad EG. Ergo erit ex ęquo* (a) *rhombus circumſcriptus ad inſcriptum, ut EC ad EG.* (a) Per 22. l. 5.

Cor. 6. *Eadem itaque proportio eſt inter rhombum conicum quadratum ſphęrę circumſcriptum & rhombum ſimilem eidem ſphæra inſcriptum, ac inter cylindrum æquilaterum eidem cuivis alteri ſphæra circumſcriptum & inſcriptum; vel inter ſphæram eidem cylindro æquilatero, ſeu eidem rhombo conico quadrato circumſcriptam & inſcriptam. Ea nempe ratio, quæ in quadrato eſt inter diametrum & lateris ſemiſſem. Patet ex cor. præced. hujus prop. & ex ſchol poſt p. 34. hujus.*]

PRO-

KAO, hoc eſt, quadratum BA, triplum quadrati (*a*) AO. Quare cum quadratum radii ZO (*b*) quadruplum ſit quadrati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, ut 4. ad 3. Ergo etiam (*c*) circulus OBKD eſt ad circulum QT ut 4. ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli OBKD, hoc eſt (*d*) tota ſphæræ DG ſuperficies, ad circulum QT, ut 16 ad 3. Atqui (*e*) ſuperficies coni æquilateri BKD eſt ad circulum QT, baſim nempe ſuam, ut 2 ad 1. ac proinde coni BKD tota ſuperficies, una cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempe circulum QT, ut 3. ad 1. ſive ut 9. ad 3. Ergo cum oſtenderim ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eumdem circulum ut 16. ad 3. erit ſphæræ DG ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 1. *l.* 6. (b) *Per cor.* 3. *p.* 4 *l* 2. (c) *Per cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12. (d) *Per* 24. *hujus.* (e) *Per cor.* 1. *p.* 18. *hujus.*

[Cor. *Ex hujus demonſtratione liquet, coni æquilateri ſphæræ inſcripti baſem QT eſſe ad maximum ſphæræ circulum DG, ut 3. ad 4.*]

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus BD, abſcindit (*f*) quartam axis partem AO, erit quoque ſphærica ſuperficies BOD (*g*) quarta pars, ac proinde ſuperficies BGKD tres quartæ ſuperficiei totius ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16; BGKD ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies BGKD (*h*) eſt dupla ſuperficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam eſt ut 12 ad 6. Ergo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam BKD ut 16. ad 6. Deinde quia ſuperficies coni BKD, (utpote æquilateri,) dupla (*i*) eſt baſeos QT, liquet ſuperficiem conicam BKD (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2. ad 3, hoc eſt, ut 6. ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni inſcripti ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

(f) *Per cor.* 5 *p.* 15 *l.* 4. (g) *Per* 27. *hujus.* (h) *Per præc.* (i) *Per cor.* 1. *p.* 38. *huj.*

PROPOSITIO XL.

SPhæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem, eam proportionem habet, quam 4. ad 9. *Fig.* 31.

Circulo ſphæræ maximo BPM circumſcriptum ſit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto, productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumſcriptus

etiam ſit circulus, NDLOF, quem (*a*) patet eſſe concentricum priori; & axis OAB producatur in N. Quoniam BN eſt (*b*) quarta pars axis ON, patet ON eſſe duplam KB. Quare cum circulorum ratio ſit (*c*) duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF ut 1. ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione prima præcedenti, circulum NDLOF eſſe ad circulum QT, baſim coni æquilateri ſphæræ FL inſcripti, ut 4. ad 3. Ex (*d*) æquo igitur circulus BPM eſt ad circulum QT ut 1. ad 3. Atqui tota coni DOF ſuperficies, circuli QT (*e*) tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli BPM noncupla eſt. Quare cum ſphæræ TP ſuperficies ejuſdem circuli BPM (*f*) quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri DOF ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ cui circumſcripta eſt, ut 9. ad 4. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. 1. *Ex hac demonſtratione patet, coni æquilateri ſphęrę conſcripti axem BO ſeſquialterum eſſe diametri ſphęræ BK, ſeu ut 3. ad 2.*

2. *Ex eadem demonſtratione liquet, coni æquilateri ſphæræ circumſcripti DOF baſim QT eſſe etiam ſeſquialteram baſium cylindri eidem ſphæræ circumſcripti. Nam QT eſt ad BPM, ut 3. ad 1. Ergo QT eſt ad BPM bis, ut 3. ad 2.*

3. *Superficies coni æquilateri DOF eſt ſuperficiei cylindri eidem ſphæræ circumſcripti ſeſquialtera. Illa enim* (g) *dupla eſt QT, hæc* (h) *quadrupla BPM. Ergo ſuperficies conica erit ad cylindricam, ut bis 3. ad quater 1; hoc eſt, ut 6. ad 4. ſeu ut 3. ad 2.*

4. *Circulus maximus BPM ſphæræ cono æquilatero DOF inſcriptæ, ſuperficies ejuſdem ſphæræ, ſuperficies tota coni DOF, & ſuperficies ſphæræ NDLOF cono circumſcriptæ, ſunt* (i) *inter ſe, ut 1. 4. 9. 16; hoc eſt, ut numerorum 1. 2. 3. 4. quadrata.*

5. *Hinc dato ſphæræ inſcriptæ radio AB, facili negotio deſcribentur circuli dictis ſuperficiebus æquales. Nam* (k) *ejuſmodi circulorum radii erunt 2AB, 4AB. Unde & ſuperficierum illarum menſuræ ſtatim innoteſcunt.*

6. *Cum diameter ON ſphæræ cono æquilatero circumſcriptæ, dupla ſit diameter KB ſphæræ inſcriptæ; erit ſphæra circumſcripta inſcriptæ octupla; nempe in triplicata* (l) *ratione diametrorum ſive ut* (m) *cubus numeri binarii ad cubum unitatis.*]

(a) *Per ſch. p. 13. & 14. l. 4.*
(b) *Per cor. 5 p. 15 l. 4.*
(c) *Per 2. l. 12.*
(d) *Per 22. l. 5.*
(e) *Per cor. 1. p. 14. hujus.*
(f) *Per 24. hujus.*
(g) *Per cor. 1. p. 14. hujus.*
(h) *Per 26. 1. & 24. hujus.*
(i) *Patet ex p. 24. hac 40. & 39. hujus.*
(k) *Per cor. 2. p. 1. 12.*
(l) *Per 18. l. 12.*
(m) *Per ſ. 1. p. 33 l. 11.*

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni ſphæra circumſcripti tota ſuperficies, quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæra. Fig. 31.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut (*a*) 9. ad 4. & ſphæræ ſupeficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SKT ſuperficiem totam, ut (*b*) 16. ad 9. Ergo ex (*c*) æqualitate perturbata, circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, ut 16. ad 4. ſive ut 4. ad 1. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per prec. (b) Per 39. hujus. (c) Per 23. l. 5.

[*Atque eodem modo, ſphæra cono æquilatero circumſcripta ſuperficies, quadrupla eſt ſuperficiei ſphæræ eidem cono inſcriptæ. Patet ex cor. 4. præced.*]

PROPOSITIO XLII.

Sphæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (BKC) *eam rationem habet quam* 32 *ad* 9. Fig. 31.

Sphæra & conus BKC ſecentur plano per axem communem KO, faciente in ſphæra circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad O K recto, abſcindatur hemiſphærium FGKI, cui inſcriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abſcindit OP (*d*) quartam partem axis OK, erit PK ad AK ut 3 ad 2. hoc eſt ut 9. ad 6. Baſis vero QT eſt ad circulum OFKI, hoc eſt, ad baſim ND, ut 3. ad 4. hoc eſt, ut 6 ad 8. uti patet ex demonſtratis prop. 39. Quare cum ratio coni BKC ad conum FKI componatur (*e*) ex ratione altitudinis PK ad altitudinem AK (hoc eſt ex ratione 9. ad 6.) & ex ratione baſis QT ad baſim ND (hoc eſt ex ratione 6 ad 8.) erit conus BKC ad conum FKI ut 9. ad 8. Quare cum ſphæra CG quadrupla (*f*) ſit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad ſphæram CG, ut 9. ad 32. Quod erat demonſtrandum.

(d) Per cor. 5. p. 15. l. 4. (e) Per n. 2. in ſchol. p. 15. l. 12. [f] Per 30. hujus.

[Aliter. PK *eſt ad* AK *ut* 3 *ad* 2, *ſive ut* 9. *ad* 6. *Et cum ſit* (g) *QT ad CG ut* 3 *ad* 4, *ſive ut* 6 *ad* 8; *erit QP ad* 4CG *ut* 6 *ad* 32. *Ergo conus altitudinis* PK *& baſeos QT; (hoc eſt, conus* BKC) *erit ad conum altitudinis* AK *& baſeos* 4CG, *(hoc* (h) *eſt, ad ſphæram* CG) *in ratione* (i) *compoſita ex* 9 *ad* 6, *&* 6 *ad* 32, *ſive* (k) *ut* 9. *ad* 32.

(g) Per cor. p. 39. hujus. (h) Per 28. hujus. (i) Per n. 2. in ſchol. p. 15. l. 12. (k) Per def. 5. l. 6.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 31.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus, coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti & circumſcripti ſint SKT & DOF, & axis communis eſto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quam ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur deſcriptus eſſe circulus NDOF, & axis OKB producatur in N. Quoniam vero æquilateri trianguli latus DF abſcindit axis ON quartam (*a*) partem NB, patet NO eſſe duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus ST abſcindit axis BK (*b*) quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, ſic BO ad CK. Sed NO dupla eſt BK. Ergo etiam BO dupla eſt CK. Igitur ob ſimilitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam (*c*) DF & ST, diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione dupla. Quare cum coni DOF, SKT ſint (*d*) ſimiles ac proinde eorum proportio (*e*) triplicata ſit proportionis diametrorum DF & ST, quæ eſt 2. ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per cor. 3. p. 15. l. 4.
(b) Per idem corol.
(d) Per 4. l. 6.
(c) Per def. a. l. 12.
(e) Per 12. l. 12.

[Aliter. *Ductis rectis DN, SB; ob angulos DOF, SKT* (f) *æquales, æquantur eorum dimidii, DON, SKB; & anguli ODN, KSB ſunt* (g) *recti, & proinde* (h) *triangula DON, SKB ſimilia ſunt: unde DO : SK :: ON : KB ::* (i) *2 : 1. Ergo & DF* (= *DO*) *: ST* (= *SK*) *:: 2 : 1. Et cum coni æquilateri DOF, SKT ſimiles ſint, erunt* (k) *ut 8. ad 1. Sunt enim 8, 4, 2, 1 ⸫.*

(f) Per cor. p. 5. l. 1.
(g) Per 31. l. 3.
(h) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(i) Patet ex dem. pr. 40. hujus
(K) Per 12. . 12.

Corol. *Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus, eſt ad conum æquilaterum eidem ſphæræ inſcriptum, ut ſphæra cono æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem cono inſcriptam; nempe ut 8. ad 1. Patet ex hac, & cor. 6. p. 40.*

Et univerſaliter; cum corpora quæcumque ſimilia ſphæris circumſcriptibilia & inſcriptibilia, diametros vel latera habeant, ſphærarum circumſcriptarum diametris proportionalia; ſintque corpora ſimilia ad ſe invicem in triplicata (eorumque ſuperficies in duplicata) ratione diametrorum vel laterum homologorum: quam (l) *igitur rationem habet ſphæra corpori cuicumque circumſcripta ad ſphæram eidem corpori inſcriptam eamdem rationem habebit corpus illud ſphæræ circumſcriptum ad corpus ſimile*

(l) Per 24. & 16. l. 5.

ſimile eidem ſphæra inſcriptum ; quam rationem habet ſuperficies ſphærica circumſcripta corpori cuilibet ad ſuperficiem ſphærica eidem inſcriptam, eamdem habebit corporis illius ſphæra circumſcripti ſuperficies ad ſimilis corporis eidem ſphæra inſcripti ſuperficiem.)]

PROPOSITIO XLIV.

SPhæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (DOF) & ſoliditate & ſuperficie tota, eam proportionem habet, quam 4. ad 9. Fig. 31.

Sphæra TP eſt ad inſcriptum (*a*) ſibi conum æquilaterum SKT, ut 32 ad 9. Inſcriptus autem SKT conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF ut (*b*) 1. ad 8. hoceſt: ut 9 ad 72. Igitur ex æquo ſphæra TP eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF, ut 32. ad 72. hoc eſt, [*utrumque numerum dividendo per* 8.] ut 4. ad 9.

(a) *Per* 42. *hujus.*
(b) *Per Præc.*

[Aliter. *Sphæra eſt ad inſcriptum conum æquilaterum* (c) *ut* 32. *ad* 9 *Inſcriptus vero eſt ad circumſcriptum* (d) *ut* (1. *ad* 8, *hoc eſt, ut*) 4. *ad* 32. *Ergo ex æquo* (e) *perturbate, ſphæra eſt ad circumſcriptum conum æquilaterum ut* 4 *ad* 9.

[c] *Per* 42. *hujus.*
(d) *Per* 43. *hujus.*
(e) *Per* 23. *l.* 5.

Propoſitione autem 40. demonſtravimus etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem ut 4. ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum ut 4. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

Quod igitur in ſphæra & cylindro ſphæram ambiente miratus eſt Archimedes, id ipſum in ſphæra & æquilatero cono ambiente ſphæram jam demonſtravimus, ut videlicet & ſoliditatum inter ſe eadem proportio rationalis, quæ ſuperficierum exiſtat. Quemadmodum enim ille reperit ſphæram ad cylindrum eſſe tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 2. ad 3. ita nos docuimus ſphæram & ſoliditate & ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe ambientem, ut 4. ad 9

Hinc vero illam ipſam proportionem, nempe ſeſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumſcripto & ſoliditate etiam ac ſuperficie continuari nullo negotio jam demonſtrabimus, atque ita huic pariter opuſculo finem imponemus

Digitized by Google

PROPOSITIO XLV.

Vide Fig. quæ huic Tractatui præfixa eſt.

Conus æquilaterus ſphæra circumſcriptus, & cylindrus rectus ſphæra ſimiliter circumſcriptus, & ipſa ſphæra, eamdem proportionem continuant, nimirum ſeſquialteram, tam quoad ſoliditatem, quam quoad ſuperficiem totam.

Nam per 32. hujus, cylindrus rectus GK ſphæram ambiens, tam ſoliditate quam tota ſuperficie eſt ad ſphæram ut 3 ad 2. ſive ut 6. ad 4. Per præcedentem vero circumſcriptus ſphæræ conus æquilaterus BAD, tam ſoliditate, quam ſuperficie eſt ad ſphæram ut 9. ad 4. Ergo idem conus eſt ad cylindrum tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 9. ad 6. Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

[PROPOSITIO XLVI.

Vide Fig. eamdem.

Inter conum æquilaterum & cylindrum eidem ſphæræ circumſcriptos, eadem obtinet ratio ſeſquialtera, quoad ſuperficies totas, ſuperficies ſimplices, ſoliditates, altitudines & baſes.

Hæc propoſitio patet, quoad ſuperficies totas & ſoliditates, ex præcedenti; quoad ſuperficies ſimplices, ex coroll. 3. prop. 40. hujus; quoad altitudines & baſes, ex coroll. 1. & 2 ejuſdem prop. 40.]

Ad majorem Dei Gloriam.

Digitized by Google

APPENDIX

Qua demonſtratur ex falſo poſſe directe deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Lovanii ſeſqui abhinc anno Illuſtriſ. D. Theodorus D'Imerſelle, Comes de Bouchove & S. Imperii, magna ingenii commendatione & auditorum plauſu publice propugnavit, inter ceteras propoſui aſſertionem hujuſmodi: *ex falſis poſſe verum directe elici, novis exemplis Geometricis confirmamus*. Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in Appendice, quam Operi ſuo pereruditо, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſa adjunxit. Id vero ea modeſtia & humanitate præſtitit, ut facile appareat, hoc illi unum fuiſſe propoſitum, ut veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri judicium parvi facere, hic illi breviter reſpondebo, & Appendici Appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio quæ directe ex ſua contradictoria inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. eſt hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonſtratione affirmativa infertur ex ſua contradictoria: *E non metitur numerum A*. Quod quidem eſt æque certum ac demonſtrationem illam eſſe legitimam. Talis in Elementis hiſce noſtris prop. 4. l. 11. eſt hæc: * *Recta BQ non eſt perpendicularis plano CAF*, quæ affirmative deducitur ex ſua contradictoria: *recta BQ eſt perpendicularis plano CAF*. Talis in propoſitione noſtra 35. l. 5 eſt hæc: † *A eſt ad B, ut E ad F*, quæ directe infertur ex ſua contradictoria: *A non eſt ad B, ut E ad F*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. de proport. p. 201. apud Theodoſium (commentante Clavio) l. 1. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere tum Geometricas tum alias.

* *Fig.* 12. *l.* 11.

† *Fig.* 10. *l.* 5.

Ecce tibi coſmographicam unam, quam in iiſdem theſibus diſputandā propoſui. *Maris, omniſque adeo humidi ſuperficiei eo ipſo concluditur eſſe ſphærica, quo id negas*. Ponatur vera eſſe ejus contradictoria: *Maris ſuperficies ſphærica non eſt*. Quoniā igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt; omnes ſuperficiei maritimæ pertes non diſtant æqualiter a centro. Ergo

una eſt altior altera, (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quam longius a centro recedere.) Ergo ex quæ altiores ſunt, defluunt verſus minus altas ſeu decliviores; hanc enim eſſe humidi naturã experientia conſtat. Ex tali autem defluxũ neceſſario oritur omniũ partium ſuperficiei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia a centro. Æqualis vero omnium partium ſuperficiei maritimæ a centro diſtantia infert ſphæricitatem ejus perfectã. *Ergo maris ſuperficies ſphærica eſt.*

Habemus igitur hanc: *Maris ſuperficies ſphærica eſt*, directe & affirmative deductam ex ſua contradictoria; *maris ſuperficies ſphærica non eſt.*

Maneat igitur, extra omnem controverſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ directe ex ſuis contradictoriis inferantur. Atqui aſſertio, quæ ex ſua contradictoria directe infertur, neceſſario vera eſt, (cum ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſario verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit; deſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directe ſequitur) Ergo & aſſertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directe & affirmative deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propoſita.

Quod vero ejuſmodi demonſtratio, qua aſſertio ex ſua contradictoria falſa directe infertur, vere ſcientiam pariat, ſic ut abſque ulteriori ulla deductione ad impoſſibile, de aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex jam dictis manifeſtum eſt, cum lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſario verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio ſequela legitima & neceſſaria infertur. Quod ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cum in eo ratio jam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, ut ex eo falſa deducantur.

His rite perceptis, facile eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, ut ſingulis Clariſſimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breviter attingere.

Primum ſupponit ex Dialectica quædam de conſequentia directa; & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subjungit deinde: *hanc ſententiam meam ſtabilio everſione omnium illorum quæ in contrarium afferi poſſe videntur.*

Primum

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur, conſtituit hujuſmodi ſyllogiſmus: Omnis leo eſt lapis: Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo* &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proindeetiam, ut oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ, &c. Quæ licet fictitiæ tantum ſint & falſæ; tamen juxta eas calculum eclipſibus, & aliis obſervationibus cœleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directe elici: *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet*, &c. contenditque rurſum, hic non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cum illi ego plane aſſentiar, neque ullum inde pro aſſertione mea argumentum petam: non me magis illa tangunt, quam primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. elem. p. 12. Cardano l. 5. de proport. p. 201. & Theodoſio l. 1. ſph. p. 12. adhibiti*, quo me digitum intendiſſe putat, & vere. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis, evidenter jam demonſtravi ſupra, ex falſo elici directe verum; neque affertur quidquam a Clariſſimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. l. 9. recitatis, ſubjungit ex eodem Clavio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſane quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint: qui tamen Logicis valde familiaris eſt, & duobus principiis omnium evidentiſſimis & natura notiſſimis nititur, hiſce nempe; quod idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe; item, quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis aliiſque etiam mihi, in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum, quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directe ex ſua contradictoria, (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis ac neceſſariis deducatur. Quod quidem quotieſcumque evenit, admiratione dignum eſt. Tantum vero abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valde familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clar. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed forma plane diverſa a Claviana illa, quam prius recitaverat, in qua vis argumentationis inter nos controverſæ clariſſime cernitur. Subjungit

deni-

denique; *neque ego tam lynceus ſum ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo verum directe ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ*, (vult, credo, dicere, *ponatur*, cum demonſtrari nequeat quod falſum eſt) *neceſſario ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G ſit centrum ſphæræ*. Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperius datam, quæ, opinor, fiet ut V. C. tametſi, quod eſt maxime, lynceus non eſſet, clare perſpiciat elici directe ex falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſoluta & formali G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directe ſequi ex ſua contradictoria, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſario verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio directe ſequitur. Habemus igitur, quod ex hac, (G non eſt centrum, directe deducta ſit hæc vera, (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cum jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum,) Ergo verum directe deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Eruditе Lector, quæ ſuper hac quæſtione breviter hic putavi apponenda. Ceterum nihil dubito quin Clariſſimus Lipſtorpius eadem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, qua dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

Trigonometriæ liber unicus.

CAPUT PRIMUM.

SINUUM DEFINITIONES.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

SInus, Tangentes, Secantes ſunt rectæ quædam lineæ, quarum in analyſi triangulorum in Geometria practica, in Aſtronomia, aliiſque uſus eſt maximus.

Sinuum Definitiones.

ESto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE diviſa ſit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & ſinguli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, ſic ut totus arcus CE diviſus ſit in partes æquales, ſeu minuta 5400. Ex centro A ad ſingulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam deſigno litteris AF. Conſtituentur hoc facto anguli 5400, quibus ſubtenduntur arcus totidem uno ſeſe invicem minuto excedentes. Ex his unum deſigno litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, ſecundus duorum minutorum, & ſic porro; ſexageſimus minutorum 60; hoc eſt gradus unius, & ſic deinceps: poſtremus EAC eſt graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta ſingula ducantur rectæ ad ſemidiametrum AC perpendiculares, quæ proinde etiam ipſæ numero erunt 5400 computando radium AE, quarum unam deſigno litteris FX. Hæ appellantur ſinus arcuum, & angulorum uno minuto ſeſe mutuo ſuperantium. *Fig. 1.*

1. Igi-

adjacens eſt ſinus totus,ſeu radius;hypotenuſa vero AF,ſeu latus recto angulo oppoſitum eſt ſecans. Patet ex definit. 6. & propoſ. 16. lib. 3. ſi centro A per B deſcribatur circulus.

Pari modo reſpectu alterius acuti anguli AFB tangens eſt AB, ſinus totus, ſeu radius eſt FB, ſecans FA. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. ſi centro F per B circulum deſcripſeris.

Hypotenuſa igitur utriuſque acuti ſecans eſt, ac proinde cum hi anguli inæquales ſunt, diverſis numeris in tabulis ſinuum hypotenuſa exprimitur.

Ceterum notandæ in primis ſunt, ac probe intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, Secantes ad uſum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus,Tangentes,Secantes, eſt earum proportionem ad radium circuli aut veram,aut a vera inſenſibiliter abberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes diviſus,ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus ſinguli Sinus, Tangentes,Secantes contineant, quæ inventio, ut poſtea oſtendam,eo accuratior futura eſt,quo plures in partes radius circuli diviſus aſſumetur. Hoc ſinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolemæus, & noviſſime Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000. Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis ſupputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noſter, Pitiſcus,Rheticus, aliique complures illuſtrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclare hoc in genere laboratum ſit, quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio eſt, optandum ſane videtur,ut facilior ea ſtudioſis, atque expeditior, ſi fieri poteſt, efficiatur. Quare animus mihi eſt, artificium, quam utile, tam pulchrum, & clarius, quam ceteri fecerunt, & brevius exponere. Rem omnem tribus Poriſmatis, & ſex Problematibus abſolvam. Sit ergo

Po-

Poriſma I.

Fig. 4.

DAto ſinu (FC,) cujuſvis arcus (FB,) complementi ſinum (FO) invenire.

(a) Per 47 l. 1. — Ducto radio AF, quadratum AF (a) æquatur quadratis FC, AC. Quare ſi ex quadrato radii, ſeu ſinus totius auferas quadratum ſinus dati FC, remanet quadratum AC, hoc eſt quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO ſinum complementi quæſitum.

Poriſma II.

Fig. 5.

DAto ſinu (CF,) cujusdam arcus (IC,) ſinum ſemiſſeos ejuſdem arcus invenire.

(b) Per 3. l. 3. (c) Per 3. l. 3. — Arcui IC ſubtende rectam IC, ad quam e centro perpendicularis ſit AL, quæ tam (b) rectam IC, quam arcum (c) ILC biſſecabit, ac proinde IO eſt ſinus arcus LI ſemiſſeos arcus ILC.

(d) Per 47 l. 1. — Ex ſinu dato CF per præcedentem inveniatur ſinus complementi CQ, ſeu FA, quo ablato ex ſinu toto AI, nota ſit FI. Nota igitur eſt ſumma quadratorum IF, CF, hoc eſt (d) quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata dabit ea rectam IC, ejuſque ſemiſſis ſinum quæſitum IO.

Poriſma III.

Fig. 6.

DAtis ſinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB,) quorum differentia non ſit major 45 minutis, ſinum (IS) arcus cujuſdam medii invenire.

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ ſinuum LX, IS ad ſinum FR. Et quia arcus LF eſt non maior 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF ſenſibiliter a rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO aſſumi poſſunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO eſt parallella LQ erit (e)

(e) Per Coroll. 1. prop. 4. l. 6.

ut

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF	ad arcus medii, & minimi differentiam IF
ita ſinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ	ad ſinus medii, & minimi differentiam IO

Quare cum hujus analogiæ tres primi termini ſint noti, etiam quartus IO innoteſcet, quem ſi addamus ſinui dato minori FR, notus erit medius quæſitus IS.

Lemma.

SEmiſſis ſubtenſæ (BC) alicujus arcus (CFB) eſt ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcus. Fig. 7.

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. ſinus arcus CF. Atqui per 3. lib. 3. CG eſt ſemiſſis CB, & per 30. lib. 3. CF ſemiſſis CFB. Ergo &c.

Problema I.

Sinum arcus 45 graduum invenire.

QUadrantem CFB ſubtendat recta CB, ad quam ex centro A ſit perpendicularis AGF. Quoniam igitur arcus CB 90 grad. (*a*) biſectus eſt in F, erit FB arcus graduum 45, cujus ſinus eſt BG. Deinde ergo ob æqualitatem laterum AC, AB anguli (*b*) quoque ACB, ABC æquales ſunt, qui vero ad A rectus erit. Ergo (*c*) ABC, ſeu ABG ſemirectus. Eſt autem (*d*) AGB rectus; reliquus ergo BAG (*e*) ſemirectus eſt, ideoque par ipſi ABG. Ergo latera BG, AG (*f*) æqualia ſunt. Ergo, quia quadratum AB æquatur (*g*) utrique quadrato BG, AG, unius quadrati BG duplum erit. Semiſſis ergo quadrati ſinus totius AB æquatur quadrato ſinus 45 graduum BG

Fig. 7.
(a) Per 30. l. 3.
(b) Per 5. l. 1.
(c) Per Coroll. 11. pr. 31. l. 1.
(d) Per hyp.
(e) Per 32. l. 1.
(f) Per 6. l. 6.
(g) Per 47. l. 1.

Quare ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea ſinum 45 grad. qui, quarum partium ſinus totus ponitur 10000000, reperietur earumdem eſſe 7071068 fere.

Pro-

Problema II.

Arcuum 60, & 30 graduum ſinus invenire.

Fig. 8

ESto quadrans BC; arcus BF graduum 60, & ſinus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduum 30, cujus ſinus ſit FG; ducatur autem BF, & ex centro AF. Quoniam arcus BQF eſt grad. 60. hoc eſt ſexta pars circumferentiæ circuli, erit BF latus hexagoni, ideoque (*a*) æquale radio AF. Anguli (*b*) igitur ad A & B in triangulo AFB æquales ſunt. Cum igitur in triangulis X, Z æquales ſint anguli FBD, FAD; item anguli FDB, FDA utpote recti; latus vero FD commune, erunt (*c*) quoque latera BD, AD æqualia: ac proinde quadratum BD eſt quarta pars quadrati ſinus totius AB, ſeu FB; ſed quadratum FB æquatur (*d*) quadratis BD, ED. Auferatur ergo quarta pars quadrati ſinus totius, ſive quadratum ſemiſſeos AD ſinus totius a quadrato ſinus totius FB, remanebit quadratum FD, cujus radix quadrata dabit rectam FD, ſinum 60. graduum. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 60. eſt 8660254.

(a) *Per coroll. 1. p. 15 l. 4.*
(b) *Per 6. l. 1.*
(c) *Per 27. l. 1.*
(d) *Per 47. l. 1.*

Sinus porro FG grad. 30. *eſt ſemiſſis ſinus totius*, utpote æqualis ipſi DA. Idem patet ex lemmate. Poſito igiur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 30. eſt 5000000.

Problema III.

Sinum 36 graduum invenire.

Fig. 9.

ESto ſemicirculus FBG, cujus baſi radius AB rectus inſiſtat. Tum radio AG biſecto in D ducatur recta DB, quæ transferatur ex D in C. Recta BC erit (*a*) latus pentagoni circulo inſcripti.

Ex ſumma quadratorum AB radii, ſive ſinus totius, & AD ſemiſſeos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea (*b*) rectam DB, hoc eſt DC. Ex DC aufer DA ſemiſſem radii fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB, notum fiet (*c*) quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni ſubtendens gradus 72. Illius ergo ſemiſſis (*d*) dabit ſinum 36 graduum. Poſito ſinu toto 10000000, ſinus grad. 36. reperietur partium 5877852.

(a) *Ptolom. l. 1. a mag.*
(b) *Per 47. l. 1.*
(c) *Per 47 lib. 1.*
(d) *Per lem.*

Corol-

Corollarium.

EX ſinu grad. 36. reperietur (*a*) ſinus complementi, nempe grad. 54. partium 8090170. [a] *Per Poriſ. 1.*

Problema IV.

Sinum graduum 12 invenire.

IN quadrante CB ſit arcus BF graduum 30, KB grad. 54, & eorum ſinus DF, GK. Igitur erit eorum differentia KF grad. 24. complementa vero erunt FC, grad. 60, KC grad. 36, quorum ſinus ſint PF, NK. *Fig. 10.*

Sinus NK grad. 36. inventus per Probl 3. auferatur ex ſinu PF grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit OF nota. Tum ſinus FD grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex ſinu KG grad. 54. invento per Coroll. præced. remanebit OK nota. Radix ſumma quadratorum OF, OK dabit (*b*) KF ſubtenſam 24. grad. illius vero ſemiſſis dabit (*c*) ſinum graduum 12. (b) *Per 47. l. 11.* [c] *Per lem.*

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis ſeſe ordinatim uno minuto ſuperantium invenire.

EX quatuor ſinibus per præcedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos ſinus omnes adminiculo trium Poriſmatum præmiſſorum inveniemus hunc in modum.

Ex ſinu graduum 45 inveniuntur ſinus ſeptem.

PRoblemate 1. inventus eſt ſinus arcus grad. 45, ſumatur graduum 45 ſemiſſis grad. 22, 30. & ſemiſſis horum grad. 11, 15. quæ amplius biſecari nequit, ſinus harum ſemiſſium reperiuntur per poriſma 2, nimirum ex ſinu grad. 45 reperitur ſinus grad. 22, 30. & ex hoc ſinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus
ſemiſſes 22, 30. 11, 15.

Accipiantur deinde harum ſemiſſium complementa; com-

plementum arcus totius grad. 45,quia ipſi æquale, tamquam inutile omittitur.

ex ſemiſſibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum ſinus reperiuntur per Poriſ. Rurſum ex his complementis ſumantur ſemiſſes ſemiſſium, quoties poſſunt; tum complementa ſemiſſium, donec complementum occurrerit, quod biſecari nequeat.

Ex compl. 67, 30. 78, 45.
Semiſſ. 33, 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiſſ. nulla.

Complementa poſtrema erant grad. 67, 30. & grad. 78, 45. Ex poſteriori, quia biſecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30. ſemiſſis eſt grad. 33, 45. cujus ſinus per Poriſ. 2. obtinetur. Hujus complementum eſt grad. 56, 15, cujus ſinus reperitur per Poriſ. 1. Quia vero complementum hoc ultimum non poteſt biſecari, hic terminus erit inveniendi ex ſinu graduum 45. Igitur ex ſinu graduum 45. inventi jam ſunt ſinus ſeptem, quorum inventionis ſeries in tabella appoſita exhibetur.

	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
	°	'	°	'	°	'	°	'
	90	0	45	0				
Semiſſ.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiſſ.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex ſinu graduum 60 *inveniuntur ſinus* 16.

Arcus 60 graduum biſecetur quoties poteſt, & accipiantur ſemiſſium complementa, quæ iterum biſeca, quoties potes, tum ſemiſſium rurſum accipe complementa, quæ denuo biſeca, & biſectionis complementum aſſume. Ex hac alterna acceptione, quæ ſexies repetita eſt, habentur arcus 16, quorum ſinus per Poriſma 2, & 1 alternatim accepta invenientur.

Sinus

Digitized by Google

Sinus grad. 60 ejuſque ſemiſſes		Complementa		Semiſſes Complementorum.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′
60	0										
30	0										
15	0	75	0	(37	30	52	30	26	15	63	45
				(18	45	71	15				
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam ſemiſſium, & complementorum ſeriem exhibet tabella hic oppoſita; atque ita ſi hactenus inventi ſinus ordinentur adnumerato ſinu toto grad. 90. habebimus 24. ſinus arcuum ſeſe gradib. $3 \frac{1}{45}$ ſuperantium.

Ex ſinu graduum 36 *habentur ſinus* 32.

Si enim arcus grad. 36 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic deinceps. Deinde ipſius ſinus 36, & omnium ſemiſſium complementa, ac rurſum ſemiſſes complementorum; eaque alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32. quorum ſinus per Poriſma 2. & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36. arcuum exhibet tabella ſubjecta.

Sinus grad. 36. cum ſuis ſemiſſ.		Comple-menta.		Semiſſ. Comple-mento-rum.		Comple-menta.		Semiſſ.		Comple-menta.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	/	o	/	o	/	o	/	o	/	o	/	o	/	o	/
36	0	54	0	27	0	63	0	31	30	58	30	29	15	60	45
								15	45	74	15				
				13	30	76	30	38	15	51	45				
				6	45	83	15								
18	0	72	0												
9	0	81	0	40	30	49	30	24	45	65	15				
				20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ex ſinu 12. graduum inveniuntur ſinus 64.

HUnc in modum. Ex ſinu 12 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic porro, tum ipſius 12, & omnium ſemiſſium complementa ſumantur deni ſemiſſes complementorum, ac rurſus ſemiſſium complementa &c. Hæc alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio, ſi duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum ſinus invenientur per Poriſma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet tabella hic adjecta.

Digitized by Google

Sinus grad. 12 usque semiſſ.		Complementa.		Semiſſ. Complementorum.		Complementa.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	M.	G.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′
12	0	78	0	39	0	51	0	25	30	64	30	32	15	57	45								
								12	45	77	15												
				19	30	70	30	35	15	54	45												
				9	45	80	15																
6	0	84	0	42	0	48	1	24	0	66	0	33	0	57	0	28	30	61	30	30	45	59	15
																14	15	75	45				
												16	30	73	30	36	45	53	15				
												8	15	81	45								
				21	0	69	0	34	30	55	30	27	45	62	15								
								17	15	72	45												
				10	30	79	30	39	45	50	15												
				5	15	84	45																
3	0	87	0	43	30	46	30	23	15	66	45												
				21	45	68	15																
1	30	88	30	44	15	45	45																
0	45	89	15																				

Quod ſi ſinus omnes hactenus inventos ſinu toto adnumerato ſimul in ordinem redigamus, ſinus habebimus 120 arcuum ſeſe mutuo 45 minutis ſuperantium, quorum primus eſt 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	/	o	/	o	/	o	/
o	o	3	o	6	o	9	o
o	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	o

Ex his 120 *Sinibus.*

Reliquos omnes intermedios ope tertii Poriſmatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primo quæremus inter ſingulos horum 120 ſinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur ſinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter ſingulos jam inventos duo quæruntur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358 proveniunt ſinus arcuum 1076 ſe minutis 5 ſuperantium.

Denique inter illos ſingulos quæremus medios quatuor arcuum uno ſe minuto excedentium, quos ſi addamus illis 1076, habentur ſinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno ſe minuto ſuperantium.

Problema VI.

Secantes, & Tangentes quaſcumque invenire.

Ex ſinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innoteſcent. *Fig 3.*

Arcus cujuſcumque BS ex. gr. 70,15. ſecans eſto AR, tangens BR, ſinus totus AB. Oporteat ſecantem AR invenire. Duc Sk ſinum arcus SB, & SN ſinum complementi SX. Per prop. 4. lib. 6. ut Ak (ſeu NS) eſt ad AS, ita AB, (ſeu AS) eſt ad AR Sunt ergo tres proportionales.

NS	AB	AR
Sinus compl. arcus dati grad. 70, 17.	Sinus totus 10000000.	Secans quæſita

Quare ſi quadratum ſinus totius dividatur per NS ſinum complementi arcus dati, quotiens dabit ſecantem quæſitam AR, ut patet ex 18. lib. 9.

Oporteat deinde dari cujuſcumque arcus BS tangentem reperire BR. Per prop. 4. lib. 6. ut Ak (ſeu NS) eſt ad kS, ita AB ad BR. Sunt ergo proportionales.

NS	kS	AB	BR
Sinus compl. arcus dati	Sinus arcus dati	Sinus totus 10000000	Tangens quæſita

Quare cum tres primi termini ſint noti, per regulam trium innoteſcet quartus.

Habent igitur ſtudioſi, quod ſupra promiſeram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tribus poriſmatis, & problematis ſex comprehenſam. Scio, plures alias eſſe ſinuum reperiendorum vias, ſed ea, quam propoſui, ceteris explicatu, ac demonſtratu m hi eſt viſa facilior.

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig. 4. REpræſentet PB arcus unius minuti, ſeu 60 ſecundorum, kB vero arcum 26 ſecundorum ex. gr. ſinus vero iſtorum arcuum ſint PM, kN. Qnoniam hi arcus inſenſibiliter differunt a rectis lineis, aſſumi poſſunt triangula PBM, kBN tamquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut PB 1 Min. ſeu 60 ſecun.	ad kB 26 ſecun.	ita PM ſinus 1 Min.	ad kN ſinum 26 ſecun.

Quare per regulam trium reperietur ſinus kN 26 ſecundorum, multiplicando videlicet ſecundum 26 per tertium, nempe 2909 ſinum 1 minuti, & productum dividendo per primum, nempe 60 ſecund.

Hoc

Hoc opere reperitur ſinus unius minuti ſecundi $49\frac{29}{60}$ poſito ſinu toto 10000000. licebitque eadem methodo reperire ſinum unius tertii, & ſic in infinitum.

Problema VIII.

Invenire ſinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam ſecunda contineat.

INveniendus ſit ex. gr. ſinus graduum 36. 20/, 16//. Arcum grad. 36. 20/. proxime minorem dato repræſentet FB; arcum vero dato proxime majorem, nempe grad. 36. 21/ referat LB. Arcum datum grad. 36. 20/ 16//, qui inter hos medius eſt, referat IB. Sinus autem horum trium arcuum ſint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF eſt 1/, ſeu 60// arcus IF, 16//, LQ differentia Sinuum LX grad. 36, 21/ & FR grad. 36, 20/. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1/, inſenſibiliter differt a recta linea, & multo adhuc minus arcus IF, 16//, erit per propoſ. 4.l.6. Fig. 6.

Ut	LF	ad	IF	ita	LQ differentia	ad IO diff.
	60//		16//		Sinuum &c.	ſinus &c.

Quare cum tres primi termini ſint noti, etiam innoteſcet quartus, differentia IO, quæ addita FR ſinui grad. 36. 20/. dabit ſinum quæſitum 15. gra. 36. 20/. 16//.

Poblema IX.

Dato Sinui arcum aſſignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adſcriptum, ſi non reperies, quære eo proxime & majorem, & minorem, quos referat LX, FR, datum vero repræſentet IS. Ducta perpendiculari FOQ, erit per 4. lib. 6.

LQ exceſſus.
Ut ſinus LX proxime majoris
dato ſupra minorem FR
ad
IO exceſſum
ſinus dati IS
ſupra minorem FR

ita

ita
arcus LF
60. ſecund.
ad
numerum ſecundum,
quæ debentur arcui IF.

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum innoteſcet, numerus nempe ſecundorum debitus arcui IF, qui additus gradibus, ac minutis arcus noti FB dabit arcum debitum ſinui dato IS.

Atqui hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum eſt, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia ſequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæſtio eſt, cur radius circuli in tot partes diviſus aſſumatur.

UT *hujus aſſumpti cauſa intelligatur, meminiſſe debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas eſſe vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 ſinus arcuum ſe invicem 45 minutis ſuperantium per extractionem radicis reperti ſunt, ut patet ex Problem. 1, 2, 3, 4, 5. Ceteri vero omnes inter hos medii ex illis 120 per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis 5 poſtrema parte conſtat. Tangentes autem, & Secantes ex ſinibus jam notis per regulam eamdem repertæ ſunt, quemadmodum Problem. 6. oſtenſum eſt. Jam vero numeri, e quibus radix fuit elicienda, ut plurimum ſunt non quadrati, ex quibus ſi radicem educas, ea ſemper a vera, quæ (ut lib. 3. Arith. cap. 6 demonſtravi) impoſſibilis eſt, differet exceſſu, defectuve aliquo, minore tamen, quam ſit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in ſupputando moleſtiam negligitur, eo minoris momenti erit, quo major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eo major, quo radius in partes plures diviſus aſſumetur. Exemplum ſtatuamus in ſinu 45 graduum, quem Probl. 1. docuimus obtineri, ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius radicem extraxeris. Si numerus radii, ſeu ſinus totius aſſumatur magnus, qualis hic eſt 10060000, illius etiam quadratus, adeoque & quadr. ſemiſſis 5000000000000 multo erit major. Porro radix integra, quæ elici poteſt ex 50000000000000, eſt 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita eſt, etiam*

ipſa

Digitized by Google

ipſa magnus eſt numerus. Unde fit, ut ipſius a radice vera
impoſſibili defectus, qui ſemper unitate minor eſt, ad ipſam
proportionem habeat inſenſibilem, proindeque tuto, & abſque
ſenſibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob cauſam tan-
tus numerus partium ſinus totius aſſum debe·. Verum, ut
hujus rei cauſa manifeſtior evadat, omnia errorum capita
exactius erunt coll·genda Primum caput erroris eſt in ſini-
bus illis primis 120, quos reperire oportuit per eductionem
radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui
ex his per regulam prop. eliciuntur, idemque proinde vitium
participant, alii duo inſunt errores propri·, videlicet quod
in triangulis LFQ, IFO arcus LF 45, & arcus IF 15, Fig. 6.
aut 5 aſſumantur tamquam rectæ lineæ; atque inſuper, cum
regula proportionum exercetur, quod fractio ex diviſione reſi-
dua negligatur. Quo vitio poſtremo etiam Tangentes, & Se-
cantes, quæ omnes ex ſinibus per prop. reg. obtinentur, labo-
rent neceſſe eſt. Denique cum ſinus perpauci tantum immediate
reperiantur, ceteri vero ſinus omnes deducantur ex invicem,
ex ſinibus autem Tangentes, & Secantes, manifeſtum eſt, ſingu-
los præter errores ſibi proprios contrahere etiam vitia eorum,
e quibus ipſi derivantur; unde fit, ut error, qui in ſinu im-
mediate invento ſimplex erat, in ſecundo quaſi duplicetur, in
tertio triplicetur, & ſic deincepr. Unde conſequens eſt, eo
ſinus eſſe accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactiſ-
ſimos vero eſſe eos, qui immediate, hoc eſt ex aliis nullis in-
venti ſunt. x his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Se-
cantium defectus oriuntur, qui ne eſſent notabiles, ſed quod-
ammodo evaneſcerent, radium maximo partium numero di-
viſum aſſumere oportuit; & quamvis defectus illi ſint non
unus, ſed (ut jam oſtendi) plures, tamen quod ſinguli nul-
lius fere momenti ſunt, etiam ſimul juncti errorem vix ſen-
ſibilem inducunt, ſi aſſumatur ſinus totus partium admodum
multarum; qua enim proportione augetur numerus radii,
eadem creſcunt numeri ſinuum, ac proinde errores, qui in
iis ſupputandis committi debent, magis evaneſcunt.

Deinde iſtud etiam tyrones intelligant, ſi Sinus, Tangen-
tes, Secantes accipiantur ad ſinum totum 10000000. quales
paſſim in tabulis reperiuntur abjectis duabus primis notis ha-
beri Sinus, Tangentes, Secantes ad radium 100000, totidem
videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. poſito radio 10000000
Sinus 8 grad. eſt 1391731, ſi cupiam minorem ad radium
100000, omiſſis duabus primis notis, is erit 13917; talis
enim Sinus, Tangentis, Secantis differentia a majori ſolum
erit fractio, cujus numerator ſint notæ abjectæ, denominator
vero ſinus totus duobus cyfris mulctatus. Itaque ſinus 8. grad.

13917

13917 *minoris a majori* 1391731, *differentia erit* 31 *diametris*

$\overline{}$
100000

Ratio pendet ex natura logiſtica decimalis, quam expoſui Arithm. Practica lib. 2. cap. 9. & ſeq. præſertim ex Theor. 1. & 2. c. 10. Poſtremo hoc in primis hic obſervabitur, cum Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur reſpectu radii ex. gr. 100000, *exactiores fore eas lineas, ſi ſupputentur reſpectu ſinus* 10000000 *datum excedentis duobus cyfris, & ab iis ita ſupputatis totidem primæ notæ, ut jam dictum eſt, abjiciantur. Ratio eſt, quia errores ſinuum multis notis conſtantium, non verſantur niſi in primis notis. Ita Regiomontanus, cum ſinus cuperet ad partes radii* 600000, *aſſumpſit radium* 600000, 00000, *& a ſinibus ad eum radium ſupputatis prima quatuor notas ſuſtulit. Similiter Rheticus, ut haberet ſinus ad radium* 10000000000 *aſſumpſit radium* 100000, 00000, 00000, *& a ſinibus per hunc repertis præſcidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ reſidua omnes vera exiſtant, ac proinde ſinus ita reperti a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, ſive canone aſſumitur. Et tales ſunt ii omnes, qui in tabulis paſſim deſcripti ſunt.*

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analyſis.

TRiangulorum omne, quod per ſe manifeſtum eſt, tria latera habet, & angulos tres, quæ ſimul juncta ſenarium numerum efficiunt. Ex his tria ſemper nota ſint oportet, ut tria reliqua, quæ ſunt ignota, cognoſcantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, ſive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analyſis Triangulorum* ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, ſeu præſtantius, ſeu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perſpiciant, non ea ſolum triangula contemplari debent, quæ in charta, vel tabula delineantur; ſed ab his cogitationes ſuas transferre ad ea oportet, quæ in campis, atque in aere, imo & in ipſo cælo per radios viſuales, & ipſas rerum diſtantias, longitudineſque deſcribuntur. Opportunum erit ex iis, quæ poſtea erunt uberius explananda, exemp. unum, alterumve quaſi ad rei totius ſpecimen

Digitized by Google

men aliquod afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cetera unum, qui dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta ſint, inveniri.

Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; diſtantiam vero oculi ab eadem recta AQ horizontalis, cum qua rectum angulum conſtituit altitudo FQ; radium viſualem extentum a turris apice F ad oculum in A repræſentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere deſcriptum, cujus unum latus eſt AQ diſtantia oculi a turre, alterum QF ipſa turris altitudo, tertium radius viſualis AF. In hoc triangulo angulus QAF (ut ſuo loco oſtendam) ſit notus inſtrumento; latus AQ diſtantia jam ſupponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto QAF, & diſtantia AQ, per univerſale problema jam dictum invenietur quanta ſit altitudo turris QF. Adjungamus & alterum. Inter cetera Problemata Trigonometrica etiam iſtud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ ſit laterum inter ſe proportio, invenire. *Fig.* 11.

Ex hoc Problemate ad diſtantiam Lunæ a Terra dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ eſto C, centrum terræ A, oculus in ſuperficie terræ in B; ſemidiameter orbis Terræ AB. Cogitentur tam ex terræ centro A, quam ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto conſtituitur triangulum a Terra ad Lunam pertingens, cujus unum latus eſt ſemidiameter Terræ AB, reliqua duo ſunt diſtantiæ tam centri Terræ, quam ipſius oculi a centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB aſtronomico artificio innoteſcit, angulus vero ABC ſit notus per inſtrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per univerſale Problema jam dictum innoteſcet, quæ ſit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc eſt, quoties diſtantia Lunæ a terra ſemidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipſa etiam diſtantia Lunæ a terra in millaribus innoteſcit. Ad tantæ rei notitam nos deduxit problema hujuſmodi, quod tyro forte aliquis nullius eſſe uſus judicaſſet. Hæc ergo dicta ſint in gratiam eorum, quibus illud in ore ſemper, cui uſui, ut ex his etiam cetera, quorum uſum non perſpiciunt, æſtimare diſcant. *Fig.* 12.

Anno-

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRiuſquam ultro tendamus, expediet hic in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus ſub hæc initia hærere plerumque tyrones ſolent. Prætereant iſta, qui his non indigent.

1. Datum, & notum idem ſignificant in hac materia.

2. Circumferentiam circuli partiri ſolent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum ſingulas rurſus in 60 æquales, quas minuta vocant.

3. Arcus circuli, ſeu pars circumferentiæ nota dicitur, cum ſcitur, quot gradus contineat, tunc enim arcus ille, quanta ſit totius circumferentiæ pars, innoteſcet.

Fig. 11. 4. Angulorum menſuræ ſunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tamquam centro inter ejus crura deſcribuntur. Sic anguli C menſura eſt arcus OQ centro C deſcriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultima lib. 6. Hac de cauſa angulus C dicitur eſſe tot graduum, quot graduum eſt ille arcus OQ, ut ſi arcus OQ eſt grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5. Angulus ille C dari, ſeu notus eſſe dicitur, quando ſcitur, quot graduum ſit, hoc eſt, quot graduum ſit arcus OQ inter ejus crura ex vertice, ut centro deſcriptus.

6. Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice deſcriptus eſt 90. grad. ſeu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura deſcriptus, eoſque ſubtendens, eſt grad. 180, ſemiſſis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicentur efficere 360 grad. quia ſubtenduntur a tota circumferentia.

Fig. 14. 7. Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures deſcribantur arcus OQ, SV, minor æque eſt menſura anguli, ac major; quia minor æque magna pars eſt ſuæ circumferentiæ totius, ac major ſuæ, ac proinde ſi arcus major OQ eſt ex. gr. 32. graduum, quorum tota circumferentia major OQLH eſt 360, etiam minor arcus SV eſt graduum 32, quorum minor circumferentia SVRT eſt 360. Patet ex Corol. 3. prop. 33. lib. 6.

Fig. 14. 8. Cujuſcumque trianguli tres anguli ſimul ſumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli ſimul ſumpti ſemper efficiunt duos rectos, ac proinde, ſi ex angulorum verticibus A, B, C tamquam centris inter trian-

trianguli cujuſvis crura deſcribantur, eodem intervallo circini, tres arcus FG, XZ, OQ ſimul ſumpti ſemper conflabunt ſemicirculum, hoc eſt arcum 180 graduum. Nam ſi centro C perficiatur ſemicirculus OQP, & arcus FG tranſcribatur ex Q in L; tertius arcus XZ æqualis erit reſiduo LP, adeoque tres ſimul arcus OQ, FG, XZ conficiunt integrum ſemicirculum OQLP.

9. Cum in triangulo ABC quocumque, noti ſint duo anguli A grad. 125, B grad. 34. etiam C tertius innoteſcit, ſi utriuſque dati gradus 159 ſubtrahuntur a 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib. 1. Atque hac de cauſa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur eſſe datus.

10. Pari ratione, ſi in quovis triangulo (ABC) notus ſit unus angulus (B grad. 39.) innoteſcit etiam ſumma reliquorum (C, A) ſi gradus anguli noti (B grad. 39.) ſubtrahantur a 180 gradibus; remanent enim gradus (141) ſummæ duorum reliquorum (C, A.) Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa dato uno angulo, dicitur & ſumma reliquorum dari. *Fig. 15.*

11. In triangulo rectangulo (BAC) dato acuto uno (C. grad. 31.) etiam acutus alter (B) innoteſcet, ſi acuti dati (grad. 31.) ſubtrahantur a gradibus 90, remanent enim grad. (59.) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa in triangulo rectangulo, cum datur acutus unus, dari dicitur etiam alter. *Fig. 16.*

12. Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cum primus A eſt ad ſecundum B, ut tertius C ad quartum Z

ut A ad B,
ita C ad Z

13. Termini noti ſunt, qui numeris exprimuntur, hoc eſt, quando ſcitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14. Cum e quatuor proportionalibus tres termini ſunt noti, quartus vero incognitus, is ſemper innoteſcet, ſi ſecundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum, quotiens enim diviſionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc eſt regula, quæ vulgo proportionum, ſive trium, & ob ſummam utilitatem Aurea appellatur, demonſtrata eſt prop. 19. lib. 9. de qua vide plura lib. 4. Arithm. c. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis ſinus ejuſdem: & dato ſinu datur angulus; ut ſi detur angulus grad. 40, 16. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columna prima ad lævam.

His

His adſcriptum reperies non ſolum ſinum illis debitum 6463460, ſed etiam tangentem 8470620, & ſecantem 13105396. Contra ſi detur ſinus, ex. gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columna ſinuum numerum datum; vel ſi non reperiatur, ei proxime æqualem, in columna prima ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæſiti.

Denique hoc obſerva: in analyſi trianguli rectanguli quamvis ſolum duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui, quia per ſe notus eſt, & triangulo rectangulo nominato ſatis ſubintelligatur, ulterius exprimi non ſolet.

ANALYSIS

TRIANGULI RACTANGULI.

PROBLEMA PRIMUM.

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

BAſi AC adſcribe totum ſinum, lateri AB ſinum oppoſiti anguli C, lateri CB ſinum anguli oppoſiti A. Eadem erit laterum proportio, quæ ſinuum. *Fig. 15.*

Demonſtratio patet ex defin. 6. cap. 2. Itaque ſi cupiam ſcire, quanto latus unum ſit altero majus ex. gr. BC quam AC: ſinum 10000000 divide per ſinum 5150381. Quotiens 1 4849619 hoc indicabit; ſicut enim quotiens eſt ad 1, ita

10000000

AC eſt ad BC.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta BC, cui adſcribe ſinum totum, lateri BA tangentem acuti C, baſi AC ſecantem ejuſdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex definit. 9. cap. 2.

Problema II.

D*Atis baſi (BC pedum 100,) & acuto uno (B grad. 59) reliqua latera (AC, AB) invenire.* *Fig. 16.*

IN triangulo rectangulo hypotenuſa, ſive baſis dicitur, quę recto angulo opponitur, latera vero, quæ rectum angulum continent.

Inventio lateris AC.

Ut data baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad latus AC, prout eſt ſinus anguli B grad. 59. 8571673

Z ita

ita eadem baſis BC, prout eſt pedum 100.	ad	eiuſdem lateris AC pedes quæſitos....

In quo analogiſmo, quia tres primi termini ſunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri AC debitorum innoteſcet per regulam proportionum multiplicando videlicet ſecundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim 857167300 ex ea diviſione proveniens, eſt quartus, qui late-
―――――
10000000

bat, numerus pedum ſcilicet, quos continet latus quæſitum AC.

Non aſſimilis inventio lateris AB. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32. lib. 1. ſeu annotat. 11. datur acutus alter C grad. 31; unde etiam utriuſque dantur. Jam

Ut baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout eſt ſinus ang. gr. 31. 5150381
ita baſis BC, prout eſt pedum 100.	ad	lateris ignoti AB pedes quæſitos....

Cum ergo tria prima ſint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri AB debitorum per regulam trium innoteſcet.

Demonſtratio.

HOc unum tum hic, tum fere etiam in ſequentibus erit demonſtrandum, quatuor ſupradictos terminos eſſe proportionales. Id vero ex definitione 6. cap. 2. manifeſtum eſt. Nam baſis BC, latus nempe recto angulo A oppoſitum eſt ſinus totus, ſeu radius, latus vero AC eſt ſinus anguli oppoſiti B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium ſinus totus, nempe baſis BC eſt 10000000, earum ſinus anguli B, nempe latus AC eſt 8571673; ac proinde ut baſis BC prout eſt ſinus totus 10000000 eſt ad AC 8571673 ſinum anguli B, ita eadem baſis BC ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæſitum, ſive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonſtrandum.

Pari modo per defin. 6. BC eſt ſinus totus 10000000, & AB ſinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381.
Ergo

Digitized by Google

Ergo ut BC ſinus totus 10000000 ad BA ſinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100. ad eamdem BA incognito pedum numero conſtantem: Quod erat demonſtrandum.

N O T A.

Fundamentum hujus, & omnium ſequentium operationum, ac demonſtrationum eſt, quod quando duæ quantitates A, & Z notæ ſunt ſecundum quamvis earum menſuram, & una earum A etiam nota eſt in alia menſura ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus neceſſario innoteſcet per regulam auream; vide cap. 1. lib. 4. Arithmeticæ noſtræ; ubi id demonſtratum eſt.

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000, *) & acuto uno, latus reliquum (BA,) & baſim (BC) invenire.* Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut ſi B detur gr. 54. *hic ſubductus a* 90. *erit C gr.* 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, prout eſt ſinus totus 10000000 ad latus ignotum AB, prout eſt anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426

ita latus datum AC, prout eſt milliariorum 1000 lateris ignoti AB milliaria quæſita.

Inventio baſis BC.

Ut latus datum AC, prout eſt ſinus totus 10000000 ad baſim ignotam BC, prout eſt acuti C dato lateri adjacentis ſecans 12360680

ita latus datum AC, prout eſt milliariorum 1000 ad ignotæ BC baſeos milliaria quæſita.

 Quare

Quare cum in utroque analogiſmo tria prima ſint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innoteſcet; eritque latus AB milliariorum $726\frac{5426}{10000}$ baſis vero BC milliariorum $123\frac{6068}{1000}$.

Demonſtratio.

PEr defin. 9. cap. 2. latus AB eſt tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426, latus vero AC eſt ſinus totus 10000000, hoc eſt, quarum partium latus AC eſt 10000000, earum eſt AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000 eſt ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæſiti lateris AB, hoc eſt ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C grad. 36 AC eſt ſinus totus 10000000 & BC ſecans, quæ ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC ſinus totus 10000000 eſt ad BC ſecantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 100. milliarium ad eamdem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig. 18. BAſi (*CB* 1000 *perticarum*) *& uno latere* (*AC* 891 *perticarum*) *datis, invenire acutos angulos, & latus alterum* (*AB*.)

Ut baſis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita baſis eadem CB, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, ſinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8910000; huic in tabula invenitur proxime æqualis 8910065, cui adſcriptus eſt angulus gr. 63, qui per probl. 9. cap. 2. adhuc reperitur exactius 15. ergo eſt angulus B, qui latebat, inventò autem acuto B datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam vero jam in triangulo rectangulo nota eſt baſis CB cum angulo C, latus quæſitum BA invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3. in Scholio prop. 47. lib. 1. elem.

De-

Demonſtratio.

Per defin. 6. cap. 2. CB eſt ſinus totus 10000000, & CA eſt ſinus anguli B. ergo ut baſis BC 1000 pertic. ad latus AC 891 pertic. ita baſis eadem BC prout eſt ſinus totus 10000000 ad idem latus AC prout eſt ſinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus CA datum pertic. 891	ad	baſim CB pertic. 1000
ita ſinus totus 10000000	ad	ſecantem ignoti ang. C datis CB, CA comprehenſi.

Demonſtratio eadem, ſed eſt defin. 9. cap. 2.

Problema V.

Duobus lateribus datis (BA pedum 79, CA pedum 100) acutos angulos; & baſim invenire. Fig. 19.

Inveniendus ſit angulus acutus C.

Ut datum latus AC adjacens quæſito ang. C	ad	alterum latus datum AB.
ita ſinus totus 10000000	ad	anguli quæſiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000; huic proxime æqualis invenitur in tabula 6156615, cui adſcriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl. 9. cap. 2. adhuc reperietur exactius. Tantus ergo eſt acutus C, qui latebat, quo ex grad. 90 ſubtracto datur & alter B grad. 52, quia vero noti jam ſunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl. 2. etiam baſis BC fiet nota.

Alias baſis inventio ab angulis independens traditur probl. 2. Scholii prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio.

Per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C ſinus totus eſt CA, tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA ex hyp. pedum 79. ita eadem CA, prout eſt ſinus totus 10000000 ad eamdem BA, ut eſt tangens quæſiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

TRiangulum, in quo nullus angulus rectus eſt, obliquangulum voco

Problema VI.

Fig. 20. 21. *DAtis omnibus lateribus lateris ſegmenta (BF. CF) facta a perpendiculari (AF) ex oppoſito angulo ducta, & ipſam perpendicularem invenire.*

Centro A intervallo lateris minoris AB deſcribatur circulus ſecans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L: manifeſtum eſt LC eſſe ſummam laterum AC, AB; & OC differentiam eorumdem; item patet ex prop. 3. lib. 3. BQ biſectam eſſe in F. His ita conſtitutis rectangula BCQ, & LCO (a) æqualia ſunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6.

(a) *Coroll. 1. prop. 36. l. 3.*

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit.	ad	LC ſummam laterum reliquorum BA, AC
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad	rectam CQ

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum nempe CQ innoteſcet, hæc, ſi perpendicularis intra triangulum cadit, (ut in fig. 20.) ablata a latere noto BC notam relinquet BQ, cujus ſemiſſis BF eſt ſegmentum quæſitum minus, quo ſubtracto a latere BC, etiam majus ſegmentum CF innoteſcet.

Quod ſi perpendicularis cadat extra (ut in Fig. 21) tunc ex quarta proportionali CQ ſubtrahe latus BC, ut innoteſcat re-

reſiduum BQ, hujus enim ſemiſſis BF dabit ſegmentum minus ad quod adjecto latere BC habetur ſegmentum majus CF.

Ipſa vero perpendicularis AF fiet nota, ſi ex quadrato lateris BA adjacentis minori ſegmento ſubtrahatur quadratum minoris ſegmenti BF, & ex reſiduo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p. 47. lib. 1.

Porro ipſa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra; cum enim minor eſt latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cum major, extra.

Hoc problema, quod ſane proinde pulchrum, atque utile eſt, expeditur etiam per prop. 13 & 12. lib. 2. ut tradidi in ſcholio ibidem; ſed modus hic traditus aliquanto facilior eſt.

Problema VII.

Datis omnibus angulis, laterum proportionem invenire. *Fig. 22. 23.*

In quovis triangulo eadem eſt inter latera proportio, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum.

Demonſtratio.

Eſto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (alias enim res per ſe eſſet manifeſta) & ex majori CB abſcindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia ſunt inter ſe parallelæ, erit (*a*) CI (hoc eſt AB ad CB, ut IL ad BF. Sed poſito ſinu toto CI eſt IL ſinus (*b*) anguli C, & poſito ſinu toto AB, (hoc eſt eodem, quo ante, cum AB, CI æquales ſint) BF eſt (*c*) ſinus anguli BAC, ergo latus AB eſt ad latus CB, ut ſinus anguli C ad ſinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonſtratio.

(a) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*
(b) *Per def. cap. 1.*
[c] *Per eand.*

Tantum nota, Cum perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus eſſe ſinum anguli BAC, quia (*d*) ſinus eſt anguli BAF, cum quo (*e*) eumdem habet ſinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

[d] *Per eand.*
[e] *Per def. 5.*

Digitized by Google

Problema VIII.

Fig. 14.

D*Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex oppoſito angulo demiſſa perpendicularis AF, & per probl. 6 nota fiant ſegmenta BF, CF.

Tum, quia in triangulo rectangulo BFA dantur BA, BF, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus B. Rurſum, quia in triangulo rectangulo CFA dantur CA, CF, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus C, & per prop. 32. lib. 1. ſeu annot. 9. etiam tertius BAC.

Problema IX.

Fig. 14.

D*Ato latere (AC,) & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire.*

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, ſinus 6293204.	ad	anguli C oppoſiti quæſito lateri AB ſinum 2756374.
ita latus datum AC 1000 paſſuum	ad	lateris quæſiti AB paſſus.

Rurſus per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppoſiti ſinus 6293204	ad	anguli A oppoſiti quæſito lateti CB ſinum 8195521
ita latus datum AC 1000 paſſuum	ad	lateris quæſiti CB, paſſus.

In utroque analogiſmo tria prima nota ſunt, quartum igitur utrobique, nimirum latera AB, CB innoteſcent per regulam proportionum.

Problema X.

Datis duobus lateribus (CA ped. 216 , BA ped. 112) & angulo (A gr. 113.) iis comprehenſo , reliquos angulos (C , B ,) & latus reliquum (CB) invenire. Fig. 26.

Quoniam CA , BA latera dantur , etiam datur eorum ſumma 328. ped. & eorumdem differentia ped. 104. Rurſum , quia datur angulus A grad. 113 , datur & reliquorum ignotorum C , B ſumma (67 grad.) adeoque & ſemiſſis ſummæ (grad. 33 , 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis : his poſitis

Ut lat. datorum CA ; BA ſumma 328. ped.	ad	laterum CA , BA differentiam 104. ped.
ita tang. 6618856 ſemiſſeos ſummæ incognitorum ang.	ad	tangentem. . . . . ſemiſſeos differ. ignotorum ang. CB

Cum ergo tria prima ſint nota , per reg. prop. innoteſcet quartum , nempe tangens ſemiſſeos differentiæ angulorum ignotorum , C , B... huic in columna tangentium proxime reperitur æqualis... , cui adſcripti ſunt grad.... pro angulo ſemiſſeos differentiæ angulorum C , B , quam ſi addas ad ſemiſſem ſummæ grad. 33 , 30 , angulorum C , B , habetur B major quæſitus. Si ſubtrahas , proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præced. jam enim præter latus , dantur & anguli.

Demonſtratio.

Analogiſmi ſupra poſiti eſt ejuſmodi : fiant anguli HPF , FPG æquales angulis ignotis B , C: centro P deſcripto circulo , qui latera angulorum ſecet in H , F , G , ducantur ad FP perpendiculares HR , GL , quæ per defin. 1 , & 6 , & 5. erunt ſinus angulorum HPF , FPG , poſito ſinu toto , ſeu radio PH , PG , ducatur deinde recta HOG , & fiat HX par ipſi GO jungaturque PX , erit XO differentia ipſarum HO , HX , hoc eſt ipſarum HO , OG , denique ex centro P du- Fig. 26. 27.

(a) Per 3. l. 3. P ducatur ad HG perpendicularis PQ, (a) quæ biſecabit HG, quoniam igitur æquales ſunt HQ, GQ; & HX, GO, etiam XQ, OQ æquales erunt. Unde QO eſt ſemiſſis differentiæ XO rectarum HO, OG, ex quo facile etiam oſtenditur, angulum HPQ eſſe ſemiſſem ſummæ angulorum HPO, OPG, hoc eſt (b) angulorum B, C: & QPO eſſe ſemiſſem differentiæ angulorum HPO, OPG; hoc eſt B, C: his poſitis differentia laterum CA, AB eſto Z.

(b) Per conſtr.

Quia HR eſt ſinus anguli HPF, hoc eſt B, & GL ſinus anguli FPG, hoc eſt C, erit latus (c) CA ad latus BA ut HR ſinus anguli B ad GL ſinum anguli C, hoc (d) eſt (quia æquiangula ſunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA (e) eſt ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipſarum HO, OG differentiam XO; & invertendo laterum differentia Z eſt ad CA, ut differentia XO ad HO: atqui (ut jam oſtendi) CA eſt ad BA, ut HO ad OG, igitur (f) ex æquo Z differentia laterum eſt ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA eſt ad Z, ut OG ad XO; quoniam ergo (ut oſtenſum ſupra) CA eſt ad AB, ut HO ad OG, ac proinde (g) componendo ſumma CA, AB eſt ad AB, ut HG ad OG; AB vero (ut jam oſtendi) ſit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo (h) erit ſumma laterum CA, AB ad Z laterum differentiam; ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, ſic ſemiſſis HG nempe HQ, quæ (i) tangens eſt anguli HPQ, ad ſemiſſem XO, nempe QO tangentem (k) anguli QPO. Ergo ſumma laterum CA, AB, eſt ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens anguli HPQ (qui, ut oſtendi ſupra, eſt ſemiſſis ſummæ angulorum BC) ad QO tangentem anguli QPO, qui eſt ſemiſſis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per Probl. 7.
(d) Per 4. l 6.
(e) Per cor. 2. p. 18. l. 5.
[f] Per 22. l. 5.
[g] Per 18. l. 5.
[h] Per 22. l. 5.
[i] Per Def. 9.
(k) Ibidem.

Alia Problematis ſolutio.

Fig. 28. 29. Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppoſitum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cum detur baſis BA, & acutus angulus BAF, per prob. 2. invenientur BF, & AF, quæ ſubtracta ex data CA in Fig. 28. addita vero ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam CF.

Rurſum ergo in trigono rectangulo CFB cum dentur duo latera

latera BF, CF per probl. 5. innoteſcet BC latus quæſitum, & angulu C, quem una cum dato A ſubtrahe a 180. grad, remanebit B alter quæſitorum.

Problema XI.

Datis duobus lateribus AB, CB, & angulo uno C iis non comprehenſo, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire. *Fig. 30.31.*

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppoſitum	ad alterum latus datum CB.
ita ſinus anguli dati C,	ad ſinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur,

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum, nempe ſinus anguli ignoti A, innoteſcet, & per ſinum invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit; ſi vero A obtuſus, tunc angulus per ſinum inventus ſubtractus a 180 gradibus relinquet quæſitum A. Ratio patet ex defin. 5.

Neceſſe igitur hic eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliunde nota ſit.

Inventis angulis; latus ignotum AC innoteſcet per Probl. 9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehenſa ducta intelligatur BF perpendicularis ad latus ignotum AC. *Fig. 32.33.*

In triangulo rectangulo BFC, cum detur baſis BC, & unus acutus C, innoteſcent per Problema ſecundum CF, & BF. Rurſus in trigono rectangulo BFA cum dentur baſis AB, & latus BF, innoteſcent per Problema quartum angulus BAF, & latus FA.

Quod ſi angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, ſit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig. 32. intra triangulum cadat, angulus *Fig. 32.*

gulus BAF jam inventus eſt ipſe BAC quæſitus ; & tunc FA jam nota addenda eſt ad CF ante repertam ; ut innoteſcat totum latus quæſitum AC.

Fig. 33. Si vero BAC ſit obtuſus, adeoque perpendicularis BF, ut in Fig. 33. extra triangulum cadat, angulus inventus BAF ſubtrahendus eſt a 180 gradibus, ut innoteſcat quæſitus BAC : & tunc FA jam nota demenda ex nota FC, ut innoteſcat latus quæſitum AC.

Rurſum igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC neceſſe eſt, ut aliunde anguli BAC nota ſit ſpecies.

Digitized by Google

DE DIMENSIONE

TRIANGULORUM SPHÆRICORUM

Ex Encyclopadia P. Gaſparis Schotti E Societate Jeſu.

DE ELEMENTIS SPHÆRICIS.

§. I.

Elementa ſphærica appello, quæ neceſſaria ſunt tum ad trigonometriam ſphæricam, tum ad univerſam ſphæricam ſcientiam intelligendam, cujuſmodi ſunt ſuppoſitiones nonnullæ, & definitiones.

Quæ ſequuntur, voco ſuppoſitiones, non quod nulla demonſtratione egeant, ſed quod demonſtrata ſumantur a Theodoſio, & aliis.

SUPPOSITIONES.

I.

Sphæra eſt figura ſolida comprehenſa unica ſuperficie convexa, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ ductæ ſunt inter ſe æquales. Centrum ſphæræ eſt prædictum punctum. Axis ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ſphæræ ducta, & utrimque terminata in ſphæræ ſuperficie, circa quam quieſcentem circumvolvitur ſphæra. Poli ſphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis. *In appoſita figura (quam globoſam fingere oportet) centrum eſt E; axis AC, & BD; poli A, & C, B, & D. Melius intelliguntur hæc, & ſequentia, ſi ante oculos habeatur globus materialis.* Theod. l. 1. ſphær. def. 1. 2. 3. 4. Fig. 36.

II.

Polus circuli in ſphæra deſcripti eſt punctum in ſuperficie ſphæræ, a quo omnes lineæ ad circuli circumferentiam ten- Idem def. 5.

dentes

Fig. 36. dentes recta ſunt inter ſe æquales. *Circuli AFCG polus unus eſt B, alter D; circuli vero BFDG polus unus eſt A, alter C.*

III.

Circuli ſphæræ aut ſunt maximi, aut non maximi: Maximi ſunt, qui dividunt ſphæram in duas æquales partes. Et hi habent idem centrum cum ſphæra: Ex quo ſequitur, circulos ſphæræ habentes idem cum ipſa centrum eſſe maximos. Non maximi ſunt, qui non dividunt ſphæram in duas partes æquales. Et hi non habent idem centrum cum ſphæra. Unde circuli non habentes idem cum ſphæra centrum, non ſunt maximi. *In figura circulus AFCG eſt maximus; HIKL vero non maximus. Prioris centrum eſt E, idem quod ſphæræ.*

Theod. p. 6. l. 1. Fig. 36.

IV.

Theod.l. 1. prop. 11. 12. Fig. 36. In ſphæra maximi circuli, qui ſe mutuo ſecant bifariam: & e contrario in ſphæra circuli, qui ſe mutuo bifariam ſecant, ſunt maximi. *Duo circuli, ABCD, & AFCG ſecant ſe bifariam in A, & C.*

V.

Omnes maximi circuli ejuſdem ſphæræ ſunt inter ſe æquales, quia eorum diametri ſunt æquales, cum omnes per idem centrum tranſeant, *ut patet in diametris AC, BD.*

Fig. 36.

VI.

Theod. prop. 15. l. 1. Si in ſphæra maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos ſecet, & bifariam eum ſecat, & per polos ipſius tranſit. Ad rectos angulos (ſcilicet ſphæricos) ſecare ſe dicuntur, quando unus tranſit per polos alterius; & conſequenter non inclinet magis ad unam ejus partem, quam ad alteram. *Sic AFCG ſecat circulum ABCD ad angulos rectos in punctis A, & C. Sic etiam BFDG ſecat circulum ABCD ad angulos rectos in B & D. Utrobique autem bifariam ſe mutuo ſecant.*

Fig. 36.

VII.

Idem prop. 15. l. 1. Si in ſphæra maximus circulus eorum, qui in ſphæra ſunt circulorum, aliquem per polos ſecet, bifariam, & ad angulos rectos eum ſecat. *Explicatio patet ex proxime dictis.*

V I I

Digitized by Google

VIII.

Si in ſphera maximus circulus per polos alterius cujuſpiam maximi circuli tranſeat, tranſibit viciſſim hic per polos illius. *Sic circulus maximus ABCD tranſit per polos B, & D circuli maximi AFCD, & hic viciſſim per polos A, & C alterius.* *Vide Theod. 1. additum ad prop. 15. l. 1. Theod. apud Clav. Fig. 36.*

IX.

Si in ſphæra circulus circulum per polos ſecet, circulus maximus eſt, & bifariam eum ſecat, & ad angulos rectos. *Sic quia circulus ABCD ſecat tam HIKL, quam AFCG per polos ipſorum B, & D, ſignum eſt eſſe maximum circulum, & utrumque bifariam ſecat, & ad angulos rectos ad H, & K, item ad A, & C.* *Vide Theor. 2. ibid. Fig. 36.*

X.

Si in ſphæra circulus circulum bifariam, & angulos rectos ſecat, circulus maximus eſt, & per polos eum ſecat. *Explicatio patet ex proxime dictis.* *Ibidem Theor. 3.*

XI.

Omnis circulus maximus diſtat undique per quadrantem maximi circuli a ſuo polo, ideoque omnis quadrans a polo maximi circuli in ipſum ductus eſt ei ad angulos rectos. *Sic AFCG diſtat a ſuis polis B, & D per quadrantes AB, CB, AD, CD &c.* *Per coroll. prop. 16. l. 1. Theod. Fig. 36.*

XII.

Si duo, aut plures maximi circuli maximum circulum ad rectos ſecent angulos, concurſus ipſorum erit ipſiuſmet circuli polus. *Patet ex globo materiali, ſi in illo deſcribuntur plures circuli maximi ſecantes alium maximum perpendiculariter.*

DEFINITIONES.

Clavius l. de Triang. Sphæricor. defi. 1. Fig. 37. ANgulus ſphæricus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe mutuo ſecantes continent. *Tales ſunt anguli AEC, CEB &c;* *Dixi*, arcus circulorum maximorum, *quia anguli ab aliis ſphæræ circulis effecti in ſuperficie ſphæræ a Trigonometris non conſiderantur. Dixi præterea*, ſeſe mutuo ſecantes, *quia omnes circuli maximi in ſphæra ſe mutuo ſecant, & numquam ſe mutuo tangunt*, per Suppoſit. 4.

II.

Idem def. 2. Angulus ſphæricus rectus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe ad angulos rectos ſecantium continent. *Tunc autem duo circuli ſecant ſe ad angulos rectos, quando unus ad alterum rectus eſt, hoc eſt, quando unus ſecans alterum non inclinat magis ad unam partem, quam ad alteram, ut ſupra dicebam Suppoſit. 6.*

III.

Idem def. 3. Angulus ſphæricus obtuſus eſt, qui recto major eſt; acutus vero, qui minor eſt recto. *Explicatione non eget.*

Vide Clav. l. de triang. ſphæricæ. prop. 10. *Conſtituitur angulus ſphæricus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in ſuperficie ſphæræ, ſi per illud punctum, & per polum dati arcus deſcribatur circulus maximus; hujus enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum conſtituet, cum circulus hic ad circulum illius arcus ſit rectus* per Suppoſit. 7. & 9. *Sic ſi*

Fig. 37. *arcus ABD ſit circuli maximi arcus, & polus ejus ſit E; ſi ex puncto A per E ducatur circulus maximus AEB &c, erit angulus A rectus. Si per datum punctum deſcribatur arcus circuli maximi non per polos dati arcus, conſtituet circumferentia hujus circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtuſum unum, alterum acutum. Sic circuli maximi arcus FHG cum circuli maximi arcu ADB ad punctum F conſtituit angulum AFH obtuſum, & HFD acutum.*

IV.

Æquales ſphærales anguli ſunt, qui ſub arcubus circulorum ad æquales angulos inclinatorum continentur.

V.

Digitized by Google

V.

Triangulum ſphæricum eſt, quod tribus arcubus circulorum maximorum ſphæræ ſuperficie continetur. *Itaque latera trianguli ſphærici ſunt arcus maximorum circulorum ſingulatim ſemicirculo minores. Triangulum ſphæricum eſt vel æquilaterum, ſi nimirum omnes tres arcus fuerint æquales: vel iſoſceles, ſi duo tantum arcus fuerint æquales: vel ſcalenum, ſi omnes inæquales inter ſe fuerint. Item vel rectangulum eſt, ſi nimirum aliquem angulum habuerit rectum: vel obtuſangulum, ſi aliquem obtuſum habuerit: vel acutangulum, ſi omnes acuti fuerint. In rectangulo, & obtuſangulo triangulo ſphærico, ſi unus angulus eſt rectus, vel obtuſus, poſſunt alii duo etiam eſſe recti, vel obtuſi, vel alter ſaltem, quod in rectilineis non contigit.* *Idem def. 5.*

VI.

Arcus anguli ſphærici eſt arcus circuli maximi, cujus polus eſt in ipſo angulo inter duos arcus angulum ſphæricum comprehendentes interceptus. *Sic arcus anguli ABC eſt AC &c; non omnis ergo arcus angulo ſphærico oppoſitus eſt illius anguli arcus. Quia vero polus circuli maximi abeſt ab eo quadrante circuli maximi, ut uterque arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & anguli poſitorum ſit quadrans. Quare ſi angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans: ſi acutus, quadrante minor; ſi obtuſus, major quadrante.* *Clav. def. 6. Fig. 37.*

VII.

Complementum arcus eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor aſt quadrante: vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante major. *Clav. def. 7.*

VIII.

Complementum anguli ſphærici eſt exceſſus, quo quadrans arcum ipſius anguli ſuperat, vel ab eo ſuperatur. *Clav. def. 8.*

IX.

Sinus, Tangens, & Secans aguli ſphærici eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcus, qui arcus anguli dicitur. *Clav. def. 9.*

Digitized by Google

§. II.

DE PROPRIETATIBUS angulorum, & triangulorum ſphærico-rum.

I.

Fig. 34. SI anguli ſphærici crura, ſive latera continuantur, concurrunt, & ſemicirculos efficiunt. *Sic anguli BAC crura AB, AC continuata concurrunt in D, & efficiunt ſemicirculos ABD, ACD. Ratio eſt, quia* per 1. Definit. *duo arcus BA, & CA ſunt arcus maximorum circulorum ſeſe mutuo ſecantes*; per 4. vero ſuppoſit. *in ſphæra maximi circuli ſe mutuo bifariam ſecant*.

II.

Clavius l. de triang. ſph. prop. 31. Fig. 34. Si anguli ſphærici crura continuata concurrunt, & ſemicirculos efficiunt, fiunt duo anguli oppoſiti inter ſe æquales. *Tales ſunt anguli BAC, BDC. Ratio eſt, quia habent eamdem menſuram, nempe arcum GH* juxta Definit. 6.

III.

Clav. ibid. prop. 5 Fig. 34. Cum arcus circuli maximi in ſphæra ſuper arcum circuli maximi conſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit. *Sic arcus circuli maximi IG conſiſtens ſuper arcum AGD facit duos angulos AGI, DGI. Si igitur circulus arcus IG tranſit per polum circuli arcus AGD, ſecetur hic ab illo ad angulos rectos* per 11. Suppoſit. *ſi non per polum tranſit, fit unus angulus obtuſus, alter acutus: æquivalentes tamen duobus rectis*.

IV.

Clav ibid. prop. 8. Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum duo anguli ſupra baſim ſunt æquales, & productis æqualibus arcubus etiam anguli infra baſim fiunt æquales. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum.

V.

V.

Si trianguli ſphærici duo anguli ſunt inter ſe æquales, etiam latera ſub æqualibus angulis ſubtenſa ſunt inter ſe æqualia. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum. *Clav. prop. 9.*

VI.

Æquilateri trianguli ſphærici ſingula latera poſſunt eſſe quadrantes maximorum circulorum, & ſingula quadrantibus vel majora, vel minora. Quando ſingula ſunt quadrantes, omnes anguli ſunt recti: quando majora quadrantibus, omnes ſunt obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando in triangulo ſphærico æquiangulo ſinguli anguli ſunt recti, ſingula latera ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora. *Clav in cor. prop. 25.*

VII.

Iſoſcelis trianguli ſphærici æqualia duo latera poſſunt eſſe quadrantes, & majora, aut minora quadrantibus. Quando ſunt quadrantes, anguli ſunt recti: quando majora, obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando duo anguli æquales ſupra baſim ſunt recti, latera æqualia ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora. *Clav. prop. 25.*

VIII.

In omni triangulo ſphærico iſoſcele, cujus duo latera æqualia ſunt quadrantes, ſi angulus ſub ipſis comprehenſus eſt rectus, baſis eſt quadrans: ſi acutus, quadrante minor: ſi obtuſus, major. Et viciſſim, ſi baſis eſt quadrans, angulus oppoſitus eſt rectus: ſi major quadrante, obtuſus: ſi minor, acutus. Semper autem polus baſis eſt in angulo ſub lateribus comprehenſo. *Clav. prop. 26.*

IX.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes arcus ſunt quadrante majores, vel unus quadrans, & reliqui duo quadrante majores, omnes tres anguli ſunt obtuſi. *Clav. prop. 27.*

X.

Clav. prop. 28. In omni triangulo ſphærico rectangulo, cujus omnes arcus ſunt quadrante minores, reliqui duo anguli ſunt acuti. Et ſi reliqui duo ſunt acuti, erunt ſinguli arcus quadrante minores.

XI.

Clav. prop. 29. In omni triangulo ſphærico; cujus omnes anguli ſunt acuti, arcus ſinguli ſunt quadrante minores.

XII.

Clav. prop. 30. In omni triangulo ſphærico, cujus unus quidem arcus quadrante major ſit, reliquorum vero uterque quadrante minor, nullus angulorum rectus eſt.

XIII.

Clav. in cor. pro. 38. Fieri non poteſt, ut in triangulo ſphærico rectangulo unus tantum arcus ſit quadrans. *Quare, qui concedit in triangulo unum quadrantem, concedere debet & alterum, & ſaltem duos angulos rectos.*

Digitized by Google

§. III.

DE DIMENSIONE

TRIANGULORUM

Sphæricorum rectangulorum, in quibus unus tantum eſt rectus.

SI triangulum ſphæricum habet tres rectos, datis, ſeu cognitis illis, data ſunt etiam latera ipſorum, utpote quadrantes, & viciſſim *per* 6. *Propriet.* Si habet duos rectos, datis illis, dantur & latera rectis oppoſita, nempe duo quadrantes *per* 6. *Propriet.* Si datur etiam latus tertium, datur angulus tertius; & viciſſim, quia tunc latus tertium eſt menſura anguli *per* 6. *Defin.* In his igitur caſibus nulla trigonometria eſt opus, ſed ſolum, quando triangulum habet unicum rectum, & reliquos obliquos, cujuſmodi eſt triangulum appoſitum rectangulum ad B. Sexdecim variationes in hoc caſu occurrere poſſunt, pro quibus ſexdecim regulas præſcribimus. In omnibus nomine baſis intelligimus arcum recto angulo oppoſitum, ut hic arcum AC. *Fig.* 35.

Propoſitio I. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito opponitur, invenire.

IN præcedenti triangulo ſit data baſis AC 600. & latus AB 200, ſitque inveniendus angulus C oppoſitus lateri dato. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris AB dati, ita ſecans complementi baſis AC ad ſinum anguli C quæſiti, EXEMPLUM. Sinus totus eſt 10000000, ſinus lateris AB 200 eſt 3420202; ſecans complementi baſis AC 600, eſt 11547005. Ducta ſecante prædicta per ſinum lateris AB, ſit ſumma 39493089590 10, qua diviſa per radium 10000000, provenit quotiens 3949308 9595 pro ſinu anguli C, cui reſpondent *Fig.* 35.

10000

230. 15′. 42″. *Juxta hanc normam etiam reliquæ operationes inſtitui debent. Brevitatis cauſa omitto exempla in ſequentibus.*

Propoſitio II. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito adjacet, invenire.

Fig. 35. IN præcedenti triangulo data baſis AC ſit 600. 30′, latus BC 300, ſitque inveniendus angulus C lateri dato adjacens. Fiat, ut radius ad tangentem lateris BC dati, ita tangens complementi baſis AC, ad ſinum complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio III. Problema.

Angulum ex baſe, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis AC ſit 600, 30′, angulus A datus ſit 230. 30. & quæratur angulus C. Fiat, ut radius ad ſinum complementi baſis AC, ita tangens anguli A dati ad tangentem complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio IV. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo oppoſito, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. ANgulus inveſtigandus ſit C, latus datum AB, & angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſinum anguli A dati, ita ſinus complementi lateris AB dati ad ſinum complementi anguli C quæſiti.

Pro-

Propoſitio V. Problema.

Angulus ex latere quæſito angulo adjacente, & altero angulo non recto invenire.

Dummodo conſtet, num angulus quæſitus ſit major recto, aut minor, vel an baſis, aut latus alterum non datum ſit quadrante majus, aut minus. Angulus inveſtigandus ſit C, latus datum BC, angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſecantem lateris dati, ita ſinus complementi anguli dati ad ſinum anguli quæſiti. Fig. 35.

Propoſitio VI. Problema.

Angulum ex utroque latere circa angulum rectum invenire.

Angulus inveſtigandus ſit C, latera data AB, & BC circa angulum rectum. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris BC, cui angulus quæſitus adjacet, ita tangens complementi alterius lateris AB quæſito angulo oppoſiti ad tangentem complementi anguli C quæſiti. Fig. 35.

Propoſitio VII. Problema.

Latus ex baſe, & altero latere invenire.

Baſis data ſit AC, latus datum BC, latus, quod inveſtigatur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem dati lateris BC, ita ſinus complementi baſis AC ad ſinum complementi lateris AB quæſiti. Fig. 35.

Digitized by Google

Propoſitio VIII. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus C, latus quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum baſis AB, ita ſinus anguli dati C ad ſinum lateris AB quæſiti.

Propoſitio IX. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito adjacet, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus A, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens baſis AC ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio X. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui quæſito lateri adjacet, invenire.

Fig. 35. D*Ummodo conſtet, an quæſitum latus ſit quadrante majus, aut minus; vel an alter angulus non rectus ſit acutus, aut obtuſus; vel denique, an baſis ſit quadrante minor, vel major.* Latus quæſitum ſit AB, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut radius ad tangentem complementi anguli A dati, ita tangens lateris BC dati ad ſinum lateris AB quæſiti.

Pro-

Digitized by Google

Propoſitio XI. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

LAtus quæſitum AB, latus datum BC, angulus datus C. Fiat, ut radius ad ſinum lateris BC dati, ita tangens anguli C dati ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio XII. Problema.

Latus ex utroque angulo non recto invenire.

LAtus quæſitum AB, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A, ita ſinus complementi anguli C ad ſinum complementi lateris AB quæſiti. *Fig. 35.*

Propoſitio XIII. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei adjacente invenire.

BAſis quæſita AC, angulus datus A, latus datum AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens complementi lateris AB dati ad tangentem complementi baſis AC quæſitæ. *Fig. 35.*

Propoſitio XIV. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei oppoſito invenire.

BAſis quæſita AC, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A dati, ita ſinus lateris BC dati ad ſinum baſis AC quæſitæ. *Fig. 35.*

Pro-

Digitized by Google

Propoſitio XV. Problema.

Baſim ex utroque latere invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, latus unum datum AB, alterum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi lateris AB, ita ſinus complementi alterius lateris BC ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

Propoſitio XVI. Problema.

Baſim ex utroque angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi alterius anguli C ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

Digitized by Google

§. IV.

DE DIMENSIONE

TRIANGULORUM

Sphæricorum obliquangulorum.

AD quatuordecim caſus reduci poſſunt cum *P. Joanne Baptiſta Ricciolo* omnia, ad quæ obliquangulorum triangulorum ſphæricorum dimenſiones pertinent, quæ totidem Problematibus cum eodem ſolvo, ut ſequitur.

Propoſitio XVII. Problema.

Angulum ſpecie præcognitum ex datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito invenire.

A*Ngulus ſpecie præcognitus dicitur, quando ſcitur utrum ſit acutus, vel obtuſus.* Fiat, ut ſinus lateris oppoſiti angulo dato ad ſinum anguli dati, ita latus reliquum datum ad ſinum anguli quæſiti, ſi acutus eſt. Si obtuſus eſt, ſubtrahe angulum prædicto modo inventum a gradibus 180, eritque reſiduum angulus quæſitus.

Pro-

Propoſitio XVIII. Problema.

Angulum verticalem ex datis duobus lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſiti, & ſpecie anguli oppoſiti reliquo lateri invenire.

ANgulum *verticalem appello, qui a datis lateribus comprehenditur*. Fiat, ut radius ad tangentem anguli dati, ita ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi *anguli primo inventi*. Deinde fiat, ut tangens lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi anguli primo inventi ad ſinum complementi *anguli ſecundo inventi*. Jam, ſi angulis datis lateribus oppoſitis ſunt ejuſdem ſpeciei, ſumma inventorum angulorum primi, & ſecundi erit angulus verticalis quæſitus; ſin minus, differentia inventorum angulorum erit quæſitus angulus verticalis.

Propoſitio XIX. Problema.

Angulum utrumque ad baſim ex datis lateribus duobus ſimul ſemicirculo minoribus, & angulo verticali invenire.

FIat, ut ſinus complementi ſemiſummæ laterum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorumdem, ita tangens complementi ſemianguli verticalis ad tangentem ſemiſummæ angulorum quæſitorum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ laterum ad ſinum ſemidifferentiæ eorumdem, ita tangens complementi ſemianguli verticali ad tangentem ſemidifferentiæ, addendæ ipſi ſemiſummæ angulorum, ut fiat angulus major, demendæ, ut fiat angulus minor quæſitorum.

Propoſitio XX. Problema.

Angulum quemvis ad baſim ex datis lateribus duobus, quorum alterum ſaltem ſit quadrante minus, & angulo verticali acuto invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli verticalis, ita tangens complementi lateris oppoſiti angulo quæſito ad tangentem complementi primi caſus. Deinde fiat, ut tangens complementi anguli verticalis, ad ſecantem complementi anguli primo inventi, ita ſinus differentiæ inter primum caſum, ac latus alterum ad tangentem complementi anguli quæſiti.

Propoſitio XXI. Problema.

Angulum tertium ex datis duobus angulis acutis, & latere oppoſito uni eorum, ac ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo dato invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum complementi lateris dati, ita tangens anguli adjacentis eidem lateri ad tangentem complementi primi anguli. Deinde fiat, ut ſinus complementi anguli adjacentis dato lateri ad ſinum complementi reliqui dati anguli, ita ſinus primi anguli ad ſinum ſecundi anguli ſpecie conformis lateri non dato.. Jam, ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi anguli inventi conflabit angulum tertium quæſitum, ſi vero eſt majus quadrande, ſumma facta ex ſecundo angulo, & primi anguli complemento ſubtracta ex gradibus 180 eumdem dabit.

Propoſitio XXII. Problema.

Angulum baſi oppoſitum ex datis duobus augulis, quorum unus ſaltem ſit acutus, & ex baſi iis adjacente, quæ ſit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum anguli datorum minoris, ita ſinus reliqui anguli dati ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius

radius ad inventum primum, ita ſinus verſus, baſis ad inventum ſecundum. Tertio addatur inventus ſecundus ſinui verſo differentiæ inter utrumvis datorum angulorum, & reliqui ſupplementum ad gradus 180. & fiet ſinus verſus anguli verticalis quæſiti.

Propoſitio XXIII. Problema.

Angulum quemlibet tamquam verticalem ex datis tribus lateribus quærere.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi lateris vnius continentis angulum quæſitum, ita ſecans complementi lateris alterius eumdem continentis ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita differentia ſinuum verſorum anguli quæſiti.

Propoſitio XXIV. Problema.

Baſim ex duobus datis lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, ac ſpecie anguli oppoſiti reliquo dato lateri invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli dati, ita tangens complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi primi arcus. Deinde fiat, ut ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato, ad ſinum complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi arcus primi ad arcum ſecundum addendum arcui primo, ſi anguli lateribus datis oppoſiti ſunt ejuſdem ſpeciei, ut habeatur baſis; alioquin differentia inventorum arcuum dabit baſim.

Propoſitio XXV. Problema.

Baſim ex datis lateribus duobus, quorum ſaltem unum ſit quadrante minus, & ex dato angulo verticali acuto, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum lateris datorum minoris, ita ſinus reliqui lateris ad aliud; invenietur arcus, qui vocetur primus. Deinde fiat, ut radius ad arcum primum, ita ſinus verſus anguli verticalis ad arcum ſecundum, quem adde ſinui verſo differentiæ laterum, & fiet ſinus verſus baſis quæſitæ.

Digitized by Google

Propoſitio XXVI. Problema.

Baſim adjacentem duobus angulis datis acutis ex iis, & ex latere uni eorum oppoſito, nec non ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli adjacentis lateri dato, ita tangens complementi lateris dati ad tangentem primi arcus. Deinde fiat, ut tangens anguli adjacentis lateri dato ad tangentem complementi reliqui anguli dati, ita ſinus primi arcus ad ſinum ſecundi arcus ſpecie conformis lateri non dato. Jam ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi arcus inventi conflabit baſim quæſitam. At ſi majus eſt quadrante, ſumma facta ex ſecundo arcu, & ex complemento primi arcus ad ſemicirculum conflabit illam.

Propoſitio XXVII. Problema.

Latus dato angulo oppoſitum, ſpecie tamen præcognitum, ex datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito invenire.

Fiat, ut ſinus anguli oppoſiti dato lateri ad ſinum dati lateris, ita ſinus reliqui anguli dati ad ſinum lateris quæſiti quadrante minoris. At, ſi debeat eſſe majus quadrante, ſubtrahatur latus inventum a gradibus 180, & habebis latus quæſitum.

Propoſitio XXVIII. Problema.

Latus utrumque unico actu ex datis angulis duobus ſimul duos rectos non excedentibus, & ex baſe ipſis adjacente invenire.

Fiat, ut ſinus complementi ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorumdem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemiſummæ laterum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum ſemidifferentiæ eorumdem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemidifferentię laterum addendę ipſi ſemiſummę laterum, ut habeatur latus majus; demendæ, ut habeatur minus.

Pro-

Propoſitio XXIX. Problema.

Latus utrumvis ex datis angulis duobus, quorum ſaltem unus ſit acutus, & ex baſi adjacente; quæ ſit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad tangentem anguli oppoſiti lateri quæſito, ita ſinus complementi baſis ad tangentem complementi primi inventi. Deinde fiat, ut tangens complementi baſis ad ſecantem primi inventi, ita ſinus complementi differentiæ inter primum inventum, & ſecundum datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo acuto; vel ſinus complementi ſummæ factæ ex invento primo, & altero datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo obtuſo ad tangentem complementi lateris quæſiti, ſi dicta ſumma, aut differentia non excedat grad. 90. vel complementi ad gradus 180. ſi excedat.

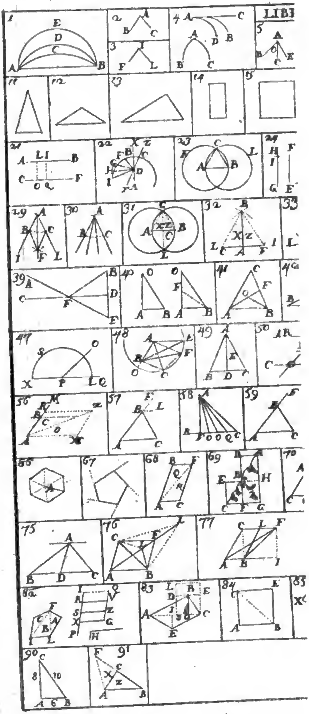
Propoſitio XXX. Problema.

Latus quodvis tamquam baſim ex datis tribus angulis invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi alterutrius angulorum quæſitæ baſi adjacentium, ita ſecans complementi reliqui dictorum angulorum ad arcum, qui vocetur inventum. Deinde fiat, ut radius ad arcum inventum, ita differentia duorum ſinuum verſorum (de qua mox) ad ſinum verſus baſis quæſitæ. Unus dictorum ſinuum verſorum ſit ſinus verſus anguli verticalis, alter autem ſinus verſus differentiæ, quæ eſt inter quemvis duorum angulorum adjacentium baſi, & inter alterius item baſi adjacentis ſupplementum ad gradus 180.

F I N I S.

Digitized by Google



Digitized by Google

5.9 '62 384 a

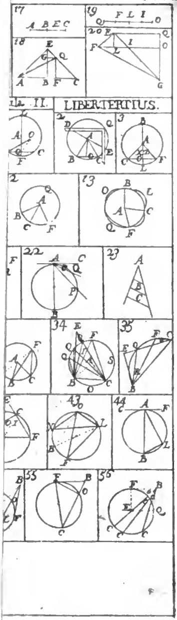
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

N°2

384 b

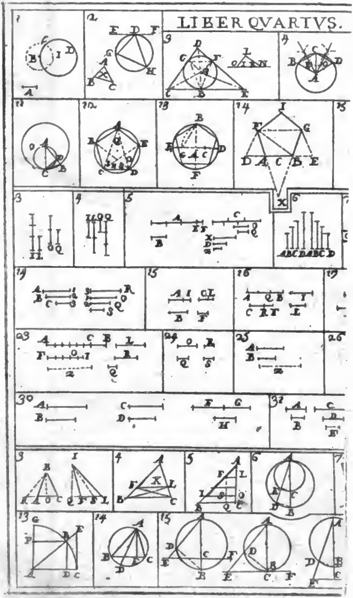


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBER QVARTVS.



Digitized by Google

384 c

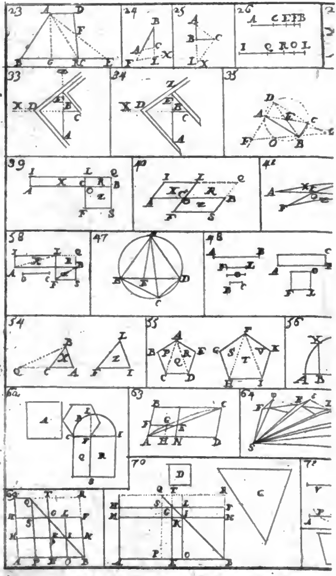
5.9.268

Digitized by Google

5.9.262 384 d

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

384 d

5.9.262

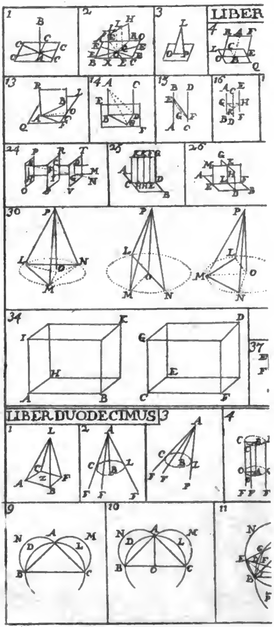
Digitized by Google

784 E

5. 9. 262

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

384 e

5.9.262

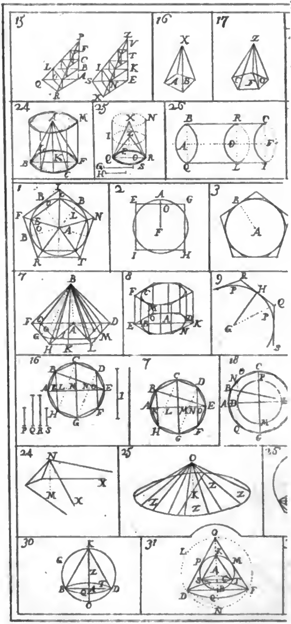
Digitized by Google

384 f
5.9.262

Digitized by Google

Digitized by Google

384 f
.262



Digitized by Google

Digitized by Google

5. 9. 262 384 S

Digitized by Google

Digitized by Google

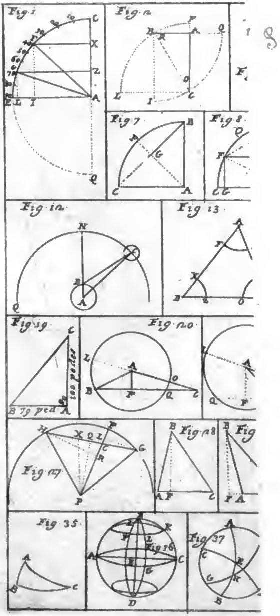


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 19
100 pedes
B 79 ped A
Fig. 20
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37

Z 5.9.262
FL 44570

385

Digitized by Google

005654907

Digitized by Google

Digitized by Google

MC

Digitized by Google